

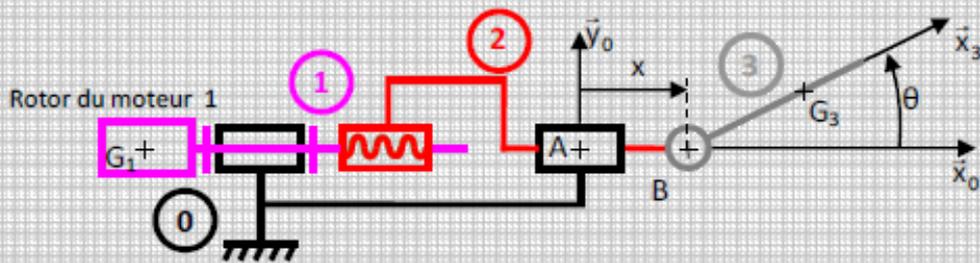
CHAPITRE 1
THEOREME DE L'ENERGIE CINETIQUE
SYNTHESE - CORRECTION

1 EXERCICE 1 : RUGOSIMETRE

The diagram illustrates the mechanical system of a rugosimeter. It is divided into three parts: 'Réal' (Real), 'Modèle' (Model), and 'Exemple d'état de surface mesuré' (Example of measured surface state).
 - **Réal:** A photograph of the physical device.
 - **Modèle:** A schematic diagram showing a motor (Moteur 1) connected to a spring (1), which is connected to a second motor (Moteur 23) and an optical sensor (3). The system is supported by a ground (0). A coordinate system (\bar{X}_0, \bar{Y}_0) is shown. The surface to be measured is labeled 'Surface à mesurer'.
 - **Exemple d'état de surface mesuré:** A 3D surface plot showing the topography of a measured surface.

La rugosimétrie est la mesure de l'état de surface des pièces mécaniques. L'ordre de grandeur des défauts mesurés est le micron. Cette mesure des états de surfaces est aussi répandue et indispensable que la mesure des caractéristiques dimensionnelles et géométriques des pièces mécaniques. La mesure de rugosimétrie repose traditionnellement sur deux éléments distincts : le capteur, qui peut être mécanique (palpeur) ou optique, et le traitement du signal (algorithmes informatiques), qui permet de traduire les mesures physiques de base, produites par le capteur, en données numériques exploitables, représentatives des caractéristiques physiques de la surface analysée.

1. Calculer l'inertie cinétique de 1 + 2 + 3
2. Calculer les puissances extérieures à 1+ 2 + 3
3. Puis les puissances intérieures à 1, 2, 3
4. Donner enfin la loi de mouvement.



Hypothèses et données :

Le rotor (1), de centre de gravité G_1 tel que $\overrightarrow{OG_1} = -a.\vec{x}_0$, a pour moment d'inertie selon l'axe (A, \vec{x}_0) J_1 . On note φ le paramètre angulaire de la liaison pivot de (1) par rapport à (0) tel que $\varphi = (\dot{y}_0; \dot{y}_1)$. Le moteur 1 génère le mouvement de rotation de (1) par rapport à (0). Le couple moteur appliqué sur (1) est noté $\overrightarrow{C}_{\text{moteur1} \rightarrow 1} = C_1.\vec{x}_0$.

Le coulisseau (2), de centre de gravité G_2 , a pour masse m_2 . La liaison glissière entre les solides (2) et (0) a pour paramètre de position x tel que $\overrightarrow{AB} = x.\vec{x}_0$.

La liaison hélicoïdale entre les solides (1) et (2) possède un pas à droite noté pas tel que pas = 0,5 mm/tour.

L'ensemble (3), de centre de gravité G_3 tel que $\overrightarrow{BG_3} = r.\vec{x}_3$, a pour masse m_3 . On donne la

matrice d'inertie de cet ensemble : $I_{G_3}(3) = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & -E_3 \\ -F_3 & B_3 & -D_3 \\ -E_3 & -D_3 & C_3 \end{pmatrix}_{(b_3)}$.

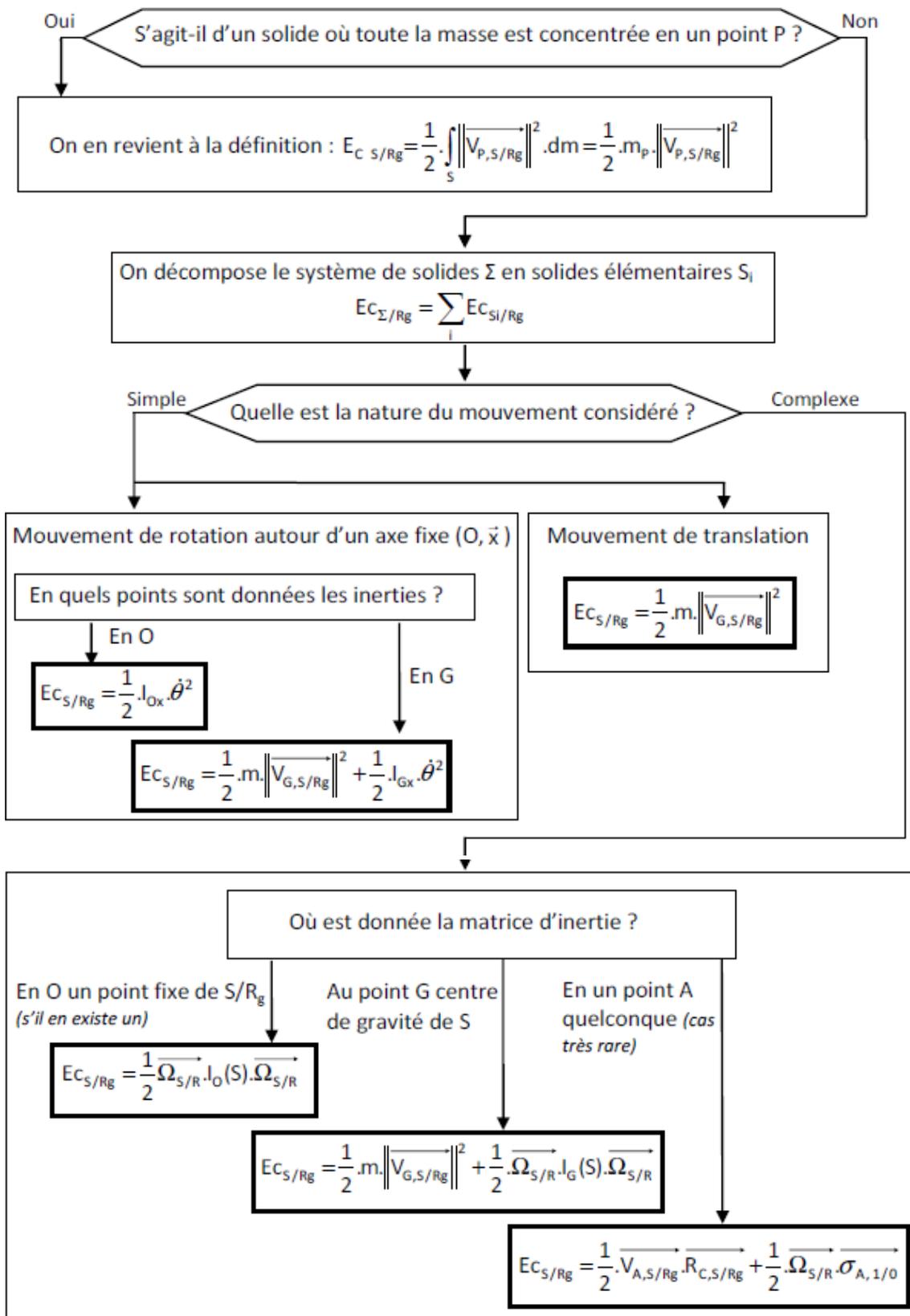
On note θ le paramètre angulaire de la liaison pivot de (3) par rapport à (2) tel que $\theta = (\dot{x}_0; \dot{x}_3)$.

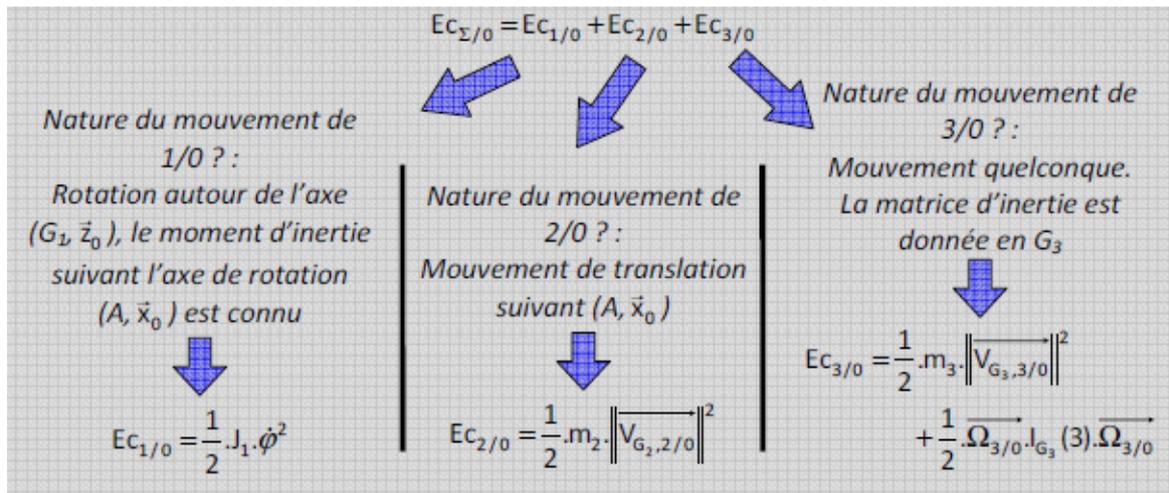
Le moteur 23 génère le mouvement de rotation de (3) par rapport à (2). Le couple moteur appliqué sur (3) est noté $\overrightarrow{C}_{\text{moteur23} \rightarrow 3} = C_3.\vec{z}_0$.

Un système d'équilibrage (ressort de torsion) permet à la tête optique d'être horizontale ($\theta = 0^\circ$) en position de repos, c'est-à-dire lorsque le moteur 23 n'est pas alimenté. Ce système exerce sur l'ensemble (3) un couple de rappel noté $\overrightarrow{C}_{2 \rightarrow 3} = C_r.\vec{z}_0$.

On considère que toutes les liaisons sont parfaites. L'action mécanique de la pesanteur est telle que $\vec{g} = -g.\vec{y}_0$.

Démarche :





$$Ec_{1/0} = \frac{1}{2} \cdot J_1 \cdot \dot{\phi}^2$$

$$Ec_{2/0} = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \|\vec{V}_{G_2,2/0}\|^2 \text{ avec } \vec{V}_{G_2,2/0} = \dot{x} \cdot \vec{x}_0 \rightarrow Ec_{2/0} = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \dot{x}^2$$

$$Ec_{3/0} = \frac{1}{2} \cdot m_3 \cdot \|\vec{V}_{G_3,3/0}\|^2 + \frac{1}{2} \cdot \vec{\Omega}_{3/0} \cdot I_{G_3}(3) \cdot \vec{\Omega}_{3/0} \text{ avec :}$$

$$\vec{V}_{G_3,3/0} = \dot{x} \cdot \vec{x}_0 + r \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{y}_3 \rightarrow \|\vec{V}_{G_3,3/0}\|^2 = \dot{x}^2 + r^2 \cdot \dot{\theta}^2 - 2 \cdot \dot{x} \cdot r \cdot \dot{\theta} \cdot \sin \theta$$

$$I_{G_3}(3) \cdot \vec{\Omega}_{3/0} = \begin{pmatrix} A_3 & -F_3 & -E_3 \\ -F_3 & B_3 & -D_3 \\ -E_3 & -D_3 & C_3 \end{pmatrix}_{(b_3)} \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{z}_3 = C_3 \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{z}_3 \rightarrow \vec{\Omega}_{3/0} \cdot I_{G_3}(3) \cdot \vec{\Omega}_{3/0} = C_3 \cdot \dot{\theta}^2$$

$$Ec_{3/0} = \frac{1}{2} \cdot m_3 \cdot (\dot{x}^2 + r^2 \cdot \dot{\theta}^2 - 2 \cdot \dot{x} \cdot r \cdot \dot{\theta} \cdot \sin \theta) + \frac{1}{2} \cdot C_3 \cdot \dot{\theta}^2$$

$$D'où : Ec_{\Sigma/0} = Ec_{1/0} + Ec_{2/0} + Ec_{3/0} = \frac{1}{2} \cdot J_1 \cdot \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \cdot m_3 \cdot (\dot{x}^2 + r^2 \cdot \dot{\theta}^2 - 2 \cdot \dot{x} \cdot r \cdot \dot{\theta} \cdot \sin \theta) + \frac{1}{2} \cdot C_3 \cdot \dot{\theta}^2$$

Puissance ext :

Si on isole l'ensemble $\Sigma = 1+2+3$, on retrouve deux éléments extérieurs développant une puissance non nulle : $\mathcal{P}_{\text{moteur } 1 \rightarrow 1/0}$ et $\mathcal{P}_{g \rightarrow 3/0}$.

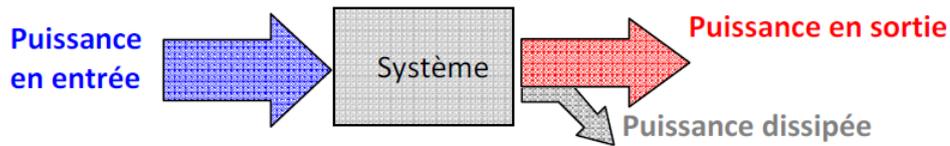
$$\mathcal{P}_{\text{moteur } 1 \rightarrow 1/0} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_1 \cdot \vec{x}_0 \end{Bmatrix}_{G_1} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\phi} \cdot \vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{G_1} = C_1 \cdot \dot{\phi}$$

$$\mathcal{P}_{g \rightarrow 3/0} = \begin{Bmatrix} -m_3 \cdot g \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{G_3} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \cdot \vec{z}_3 \\ \dot{x} \cdot \vec{x}_0 + r \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{y}_3 \end{Bmatrix}_{G_1} = -m_3 \cdot g \cdot r \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{y}_0 \cdot \vec{y}_3 = -m_3 \cdot g \cdot r \cdot \dot{\theta} \cdot \cos \theta$$

$\mathcal{P}_{g \rightarrow 1/0}$ et $\mathcal{P}_{g \rightarrow 2/0}$ sont 2 puissances extérieures nulles ici.

Puissance int :

Dans certains problèmes, la puissance perdue dans un mécanisme est donnée par le rendement η de ce mécanisme.



On a $\mathcal{P}_{\text{int}} = \mathcal{P}_S - \mathcal{P}_e$ et $\eta = \frac{\mathcal{P}_S}{\mathcal{P}_e} \rightarrow \mathcal{P}_{\text{int}} = \mathcal{P}_e \cdot (\eta - 1)$.

Si on isole l'ensemble $\Sigma = 1 + 2 + 3$, on retrouve deux éléments intériorisant une puissance non nulle : $\mathcal{P}_{(\text{moteur } 23) \ 3 \leftrightarrow 2}$ et $\mathcal{P}_{(\text{ressort}) \ 3 \leftrightarrow 2}$.

$$\mathcal{P}_{(\text{moteur } 23) \ 3 \leftrightarrow 2} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_3 \cdot \vec{z}_0 \end{Bmatrix}_B \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B = C_3 \cdot \dot{\theta}$$

$$\mathcal{P}_{(\text{ressort}) \ 3 \leftrightarrow 2} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_r \cdot \vec{z}_0 \end{Bmatrix}_B \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B = C_r \cdot \dot{\theta}$$

TEC :

$$\mathcal{P}_{\text{ext} \rightarrow \Sigma / R_g} + \mathcal{P}_{\text{int}} = \frac{d}{dt} E_c(\Sigma / R_g) \Big|_{R_g} \quad \text{avec : } \mathcal{P}_{\text{ext} \rightarrow \Sigma / R_g} = C_1 \cdot \dot{\phi} - m_3 \cdot g \cdot r \cdot \dot{\theta} \cdot \cos \theta \quad \mathcal{P}_{\text{int}} = C_3 \cdot \dot{\theta} + C_r \cdot \dot{\theta}$$

$$E_{c_{\Sigma/0}} = \frac{1}{2} \cdot J_1 \cdot \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \cdot m_3 \cdot (\dot{x}^2 + r^2 \cdot \dot{\theta}^2 - 2 \cdot \dot{x} \cdot r \cdot \dot{\theta} \cdot \sin \theta) + \frac{1}{2} \cdot C_3 \cdot \dot{\theta}^2$$