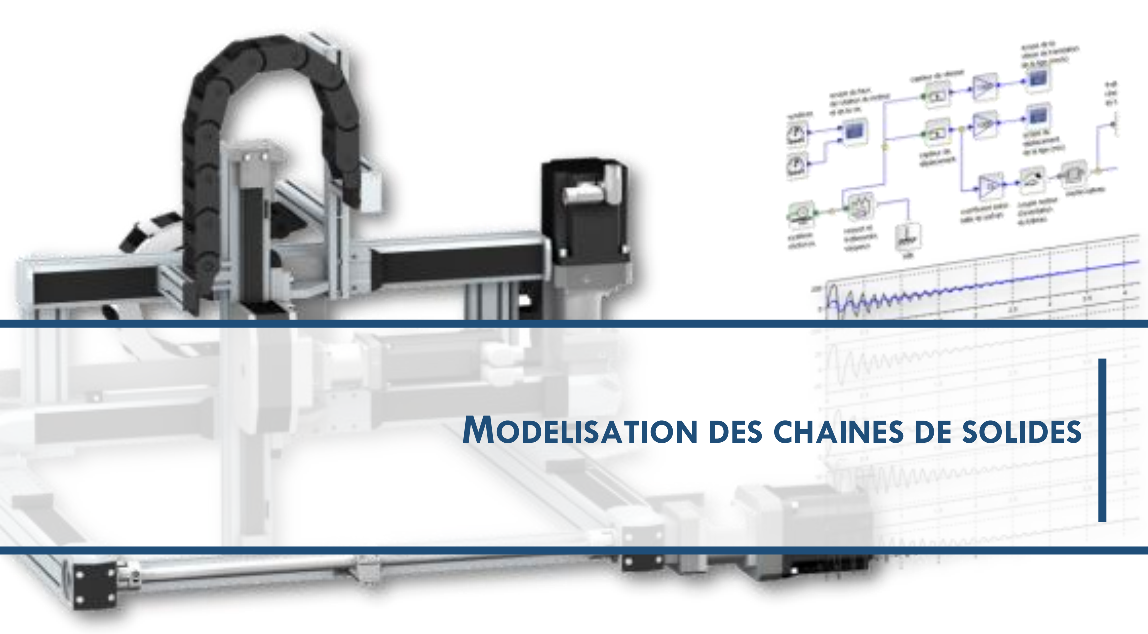


CYCLE 3

MODELISATION DES CHAINES DE SOLIDES

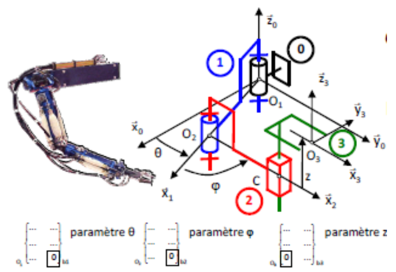
TD 4 - PSI

CHAPITRE 3

PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE

SYNTHESE

TYPES DE PB :



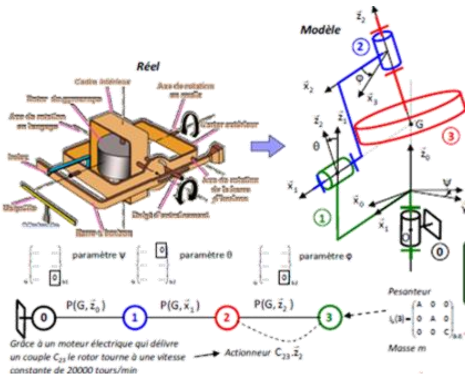
1. Dimensionner un actionner : on connait les lois de mouvement et les inerties → **voir exo 1**

Quelle liaison ? → une équation judicieuse du PFD avec l'actionneur et pas d'inconnues de liaisons

→ il faut exploiter le « 0 » du torseur d'AMT de la liaison où agit l'actionneur à l'aide du TMD sur un axe de rotation ou du TRD sur un axe de translation

→ Sur une chaîne ouverte, il suffit d'isoler tout le système en mouvement après la liaison de l'actionneur. Pour une chaîne fermée, il n'est pas possible avec une seule application du PFD d'obtenir le résultat recherché. Il faut donc réaliser plusieurs isolements successifs, de proche en proche

2. Trouver les lois de mouvements : on connait les actionneurs et les inerties



➔ **Sur une chaine ouverte : exo 2**

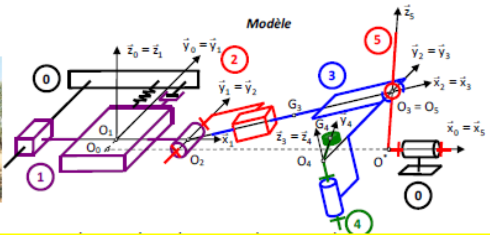
On compte le nombre de paramètres cinématiques pour lesquels on ne connaît pas les lois du mouvement

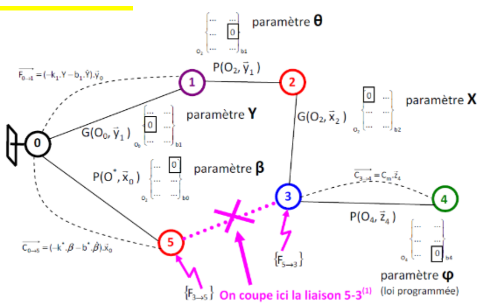
→ Il faut écrire avec le PFD autant d'équations scalaires que de paramètres cinématiques inconnus comptés, le tout, sans faire intervenir d'inconnues de liaison

→ il faut exploiter le « 0 » du torseur d'AMT de la liaison où agit l'actionneur à l'aide du TMD sur un axe de rotation ou du TRD sur un axe de translation

➔ **Sur une chaine fermée : exo 3**

On compte le nombre de paramètres cinématiques pour lesquels on ne connaît pas les lois





« ouvrir la chaîne » en supprimant une liaison de la chaîne fermée (si possible celle avec le moins d'inconnues de liaison). Les actions mécaniques de la liaison coupée sont désormais considérées comme des AME inconnues

→ écrire N équations scalaires (fermeture géométrique + PFD) dans lesquelles il n'y a pas d'inconnues de liaison supplémentaires

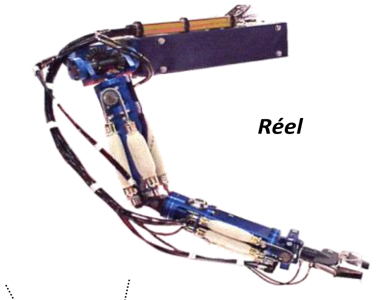
→ il faut exploiter le « 0 » du torseur d'AMT de la liaison où agit l'actionneur à l'aide du TMD sur un axe de rotation ou du TRD sur un axe de translation

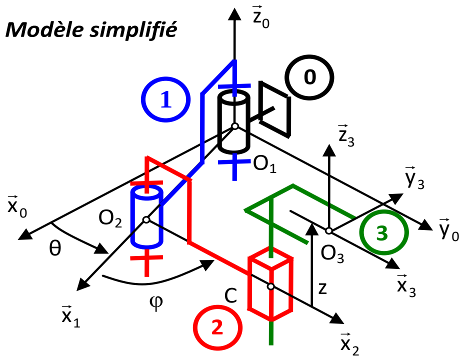
3. Dimensionner une liaison : on connait les actionneurs, les lois de mouvement et les inerties → voir équilibrage

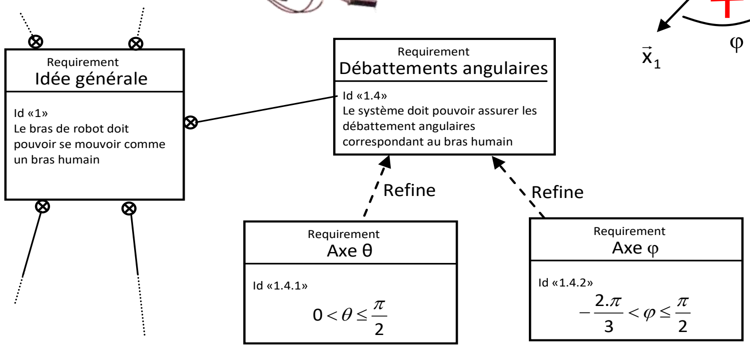
La mise en équation à l'aide du PFD permet de déterminer les actions mécaniques dans les liaisons avec le bâti puis permet de mettre en évidence les conditions pratiques d'équilibrage

- ➔ **<u>Conséquence pratique 1 :</u> Un rotor est équilibré statiquement si son centre de gravité est positionné sur son axe de rotation**
- ➔ **<u>Conséquence pratique 2 :</u> Un rotor est équilibré dynamiquement si son centre de gravité est positionné sur son axe de rotation et si son axe de rotation est axe principal d'inertie.**

1 EXERCICE 1 : BRAS DE MANUTENTION (VOIR PARAMETRAGE TD CYCLE 2)







Pour déterminer le couple moteur C_1, il faut isoler l'ensemble E = 1+2+3 et utiliser le théorème du moment dynamique écrit au point O_1 projeté sur l'axe $\vec{z}_0$. Ce choix permet d'obtenir une équation scalaire où aucune inconnue de liaison n'intervient puisqu'elle correspond au 0 du torseur d'action mécanique transmissible.

On a donc : $\overrightarrow{\delta_{O_1,E/0}}.\vec{z}_0 = \overrightarrow{M_{O_1(\bar{E}\to E)}}.\vec{z}_0$ *avec* $\overrightarrow{M_{O_1(\bar{E}\to E)}}.\vec{z}_0 = C_1$.

Démarche de calcul pour : $\overrightarrow{\delta_{O_1,E/0}} = \overrightarrow{\delta_{O_1,1/0}} + \overrightarrow{\delta_{O_1,2/0}} + \overrightarrow{\delta_{O_1,3/0}}$

Inertie et masse négligées

Nature du mouvement de 1/0 ? :
Rotation autour de l'axe (O_1, $\vec{z}_0$)

On connait les éléments d'inertie du solide 1 au centre de gravité G_1

→ le plus simple pour calculer $\overrightarrow{\delta_{O_1,1/0}}$ est :

- de calculer $\overrightarrow{\sigma_{G_1,1/0}} = I_{G_1}(S_1).\overrightarrow{\Omega_{1/0}}$

- d'utiliser le théorème du transport puisque O_1 est un point fixe dans 0 :

$$\overrightarrow{\sigma_{O_1,1/0}} = \overrightarrow{\sigma_{G_1,1/0}} + \overrightarrow{O_1G_1} \wedge \overrightarrow{R_{C\,1/0}}$$

- d'appliquer enfin la définition :

$$\overrightarrow{\delta_{O_1,1/0}} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma_{O_1,1/0}}\Big|_0$$

Nature du mouvement de 2/0 ? :
Mouvement quelconque

On connait les éléments d'inertie du solide 2 au centre de gravité G_2

→ le plus simple pour calculer $\overrightarrow{\delta_{O_1,2/0}}$ est :

- de calculer $\overrightarrow{\sigma_{G_2,2/0}} = I_{G_2}(S_2).\overrightarrow{\Omega_{2/0}}$

- d'utiliser le théorème du transport puisque O_1 est un point fixe dans 0 :

$$\overrightarrow{\sigma_{O_1,2/0}} = \overrightarrow{\sigma_{G_2,2/0}} + \overrightarrow{O_1G_2} \wedge \overrightarrow{R_{C\,2/0}}$$

- d'appliquer enfin la définition :

$$\overrightarrow{\delta_{O_1,2/0}} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma_{O_1,2/0}}\Big|_0$$

$$\overrightarrow{\delta_{O_1,E/0}}=\overrightarrow{\delta_{O_1,1/0}}+\overrightarrow{\delta_{O_1,2/0}}+\overrightarrow{\delta_{O_1,3/0}}$$

Inertie et masse négligées

On a $\overrightarrow{\sigma_{G_1,1/0}}=I.\dot{\theta}.\vec{z}_0$

$$\rightarrow \overrightarrow{\sigma_{O_1,1/0}}=\overrightarrow{\sigma_{G_1,1/0}}+\overrightarrow{O_1G_1}\wedge\overrightarrow{R_{C1/0}}$$

$$\rightarrow \overrightarrow{\sigma_{O_1,1/0}}=I.\dot{\theta}.\vec{z}_0+\frac{L}{2}.\vec{x}_1\wedge\overrightarrow{R_{C1/0}}$$

Avec $\overrightarrow{R_{C1/0}}=m.\overrightarrow{V_{G_1\,1/0}}=m.\frac{L}{2}.\dot{\theta}.\vec{y}_1$

$$\rightarrow \overrightarrow{\sigma_{O_1,1/0}}=\left(I+m.\frac{L^2}{4}\right).\dot{\theta}.\vec{z}_0$$

puis par définition : $\overrightarrow{\delta_{O_1,1/0}}=\frac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma_{O_1,1/0}}\Big|_0$

$$\overrightarrow{\delta_{O_1,1/0}}=\left(I+m.\frac{L^2}{4}\right).\ddot{\theta}.\vec{z}_0$$

On a $\overrightarrow{\sigma_{G_2,2/0}}=I.(\dot{\theta}+\dot{\varphi}).\vec{z}_0$

$$\rightarrow \overrightarrow{\sigma_{O_1,2/0}}=\overrightarrow{\sigma_{G_2,2/0}}+\overrightarrow{O_1G_2}\wedge\overrightarrow{R_{C2/0}}$$

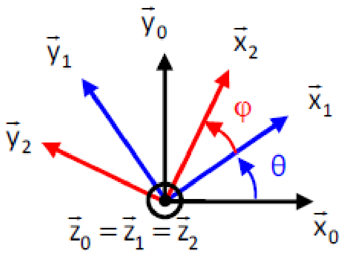
$$\rightarrow \overrightarrow{\sigma_{O_1,2/0}}=I.(\dot{\theta}+\dot{\varphi}).\vec{z}_0+(L.\vec{x}_1+\frac{L}{2}.\vec{x}_2)\wedge\overrightarrow{R_{C2/0}}$$

Avec $\overrightarrow{R_{C2/0}}=m.\overrightarrow{V_{G_2\,2/0}}=m.L.\dot{\theta}.\vec{y}_1+m.\frac{L}{2}.(\dot{\theta}+\dot{\varphi}).\vec{y}_2$

D'où $(L.\vec{x}_1+\frac{L}{2}.\vec{x}_2)\wedge(m.L.\dot{\theta}.\vec{y}_1+m.\frac{L}{2}.(\dot{\theta}+\dot{\varphi}).\vec{y}_2)$

$$=m.L^2.\dot{\theta}.\vec{z}_0+m.\frac{L^2}{2}.(\dot{\theta}+\dot{\varphi}).\cos\varphi.\vec{z}_0+m.\frac{L^2}{2}.\dot{\theta}.\cos\varphi.\vec{z}_0$$

$$+m.\frac{L^2}{4}.(\dot{\theta}+\dot{\varphi}).\vec{z}_0$$



$$\overrightarrow{\sigma_{O_1,2/0}}=I.(\dot{\theta}+\dot{\varphi}).\vec{z}_0+m.L^2.\dot{\theta}.\vec{z}_0+m.\frac{L^2}{2}.(\dot{\theta}+\dot{\varphi}).$$

$$\cos\varphi.\vec{z}_0+m.\frac{L^2}{2}.\dot{\theta}.\cos\varphi.\vec{z}_0+m.\frac{L^2}{4}.(\dot{\theta}+\dot{\varphi}).\vec{z}_0$$

puis par définition : $\overrightarrow{\delta_{O_1,2/0}}=\frac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma_{O_1,2/0}}\Big|_0$

D'où :

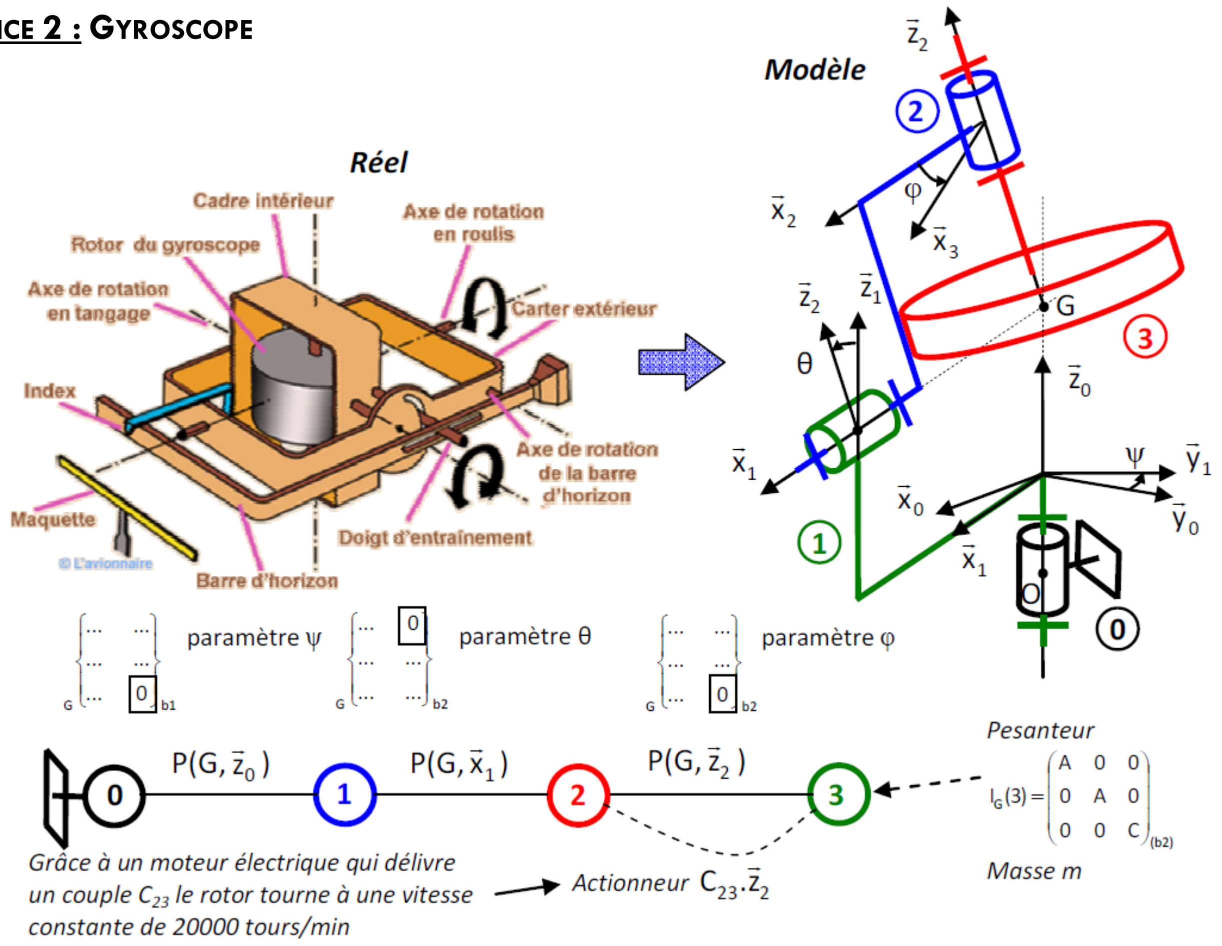
$$\overrightarrow{\delta_{O_1,E/0}}=\overrightarrow{\delta_{O_1,1/0}}+\overrightarrow{\delta_{O_1,2/0}}=\left(I+m.\frac{L^2}{4}\right).\ddot{\theta}.\vec{z}_0+I.(\ddot{\theta}+\ddot{\varphi}).\vec{z}_0+m.L^2.\ddot{\theta}.\vec{z}_0+m.\frac{L^2}{2}.(\ddot{\theta}+\ddot{\varphi}).\cos\varphi.\vec{z}_0$$

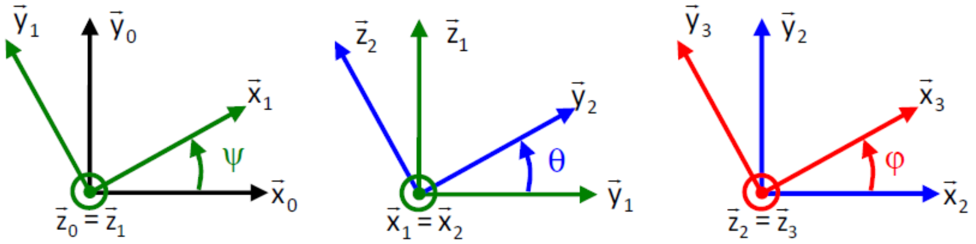
$$-m.\frac{L^2}{2}.(\dot{\theta}+\dot{\varphi}).\dot{\varphi}.\sin\varphi.\vec{z}_0+m.\frac{L^2}{2}.\ddot{\theta}.\cos\varphi.\vec{z}_0-m.\frac{L^2}{2}.\dot{\theta}.\dot{\varphi}.\sin\varphi.\vec{z}_0+m.\frac{L^2}{4}.(\ddot{\theta}+\ddot{\varphi}).\vec{z}_0$$

Au final l'utilisation du PFD donne :

$$C_1=\left(I+m.\frac{L^2}{4}+m.L^2+m.\frac{L^2}{2}.\cos\varphi\right).\ddot{\theta}+\left(I+m.\frac{L^2}{2}.\cos\varphi+m.\frac{L^2}{4}\right).(\ddot{\theta}+\ddot{\varphi})-m.\frac{L^2}{2}.\dot{\varphi}.\sin\varphi.(2.\dot{\theta}+\dot{\varphi})$$

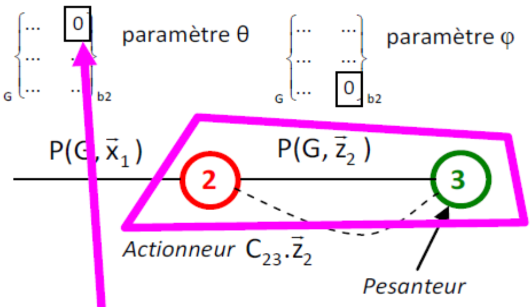
2 EXERCICE 2 : GYROSCOPE



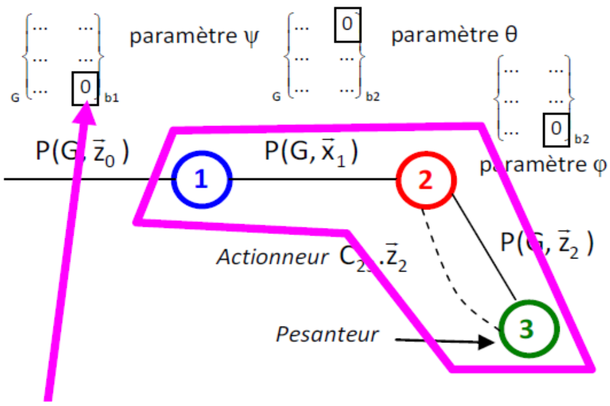


Le modèle possède 3 paramètres cinématiques : ψ, θ et φ.Il existe une condition liée à la loi horaire : $\dot{\varphi} = \Omega = \text{cte}$

→ il y a donc 2 degrés de liberté de mouvement en ψ et θ et il faut rechercher 2 équations scalaires à l'aide du PFD liées à ces 2 degrés de liberté de mouvement ne faisant pas intervenir les inconnues de liaisons :



On isole 2+3 et on utilise le théorème du moment dynamique écrit en G et projeté sur $\vec{x}_2$ → $\overrightarrow{\delta_{G,\,2+3/0}}.\vec{x}_2 = 0$



On isole 1+2+3 et on utilise le théorème du moment dynamique écrit en G et projeté sur $\vec{z}_1$

→ $\overrightarrow{\delta_{G,\,1+2+3/0}}.\vec{z}_1 = 0$

Calcul de $\overrightarrow{\delta_{G,\,2+3/0}}.\vec{x}_2 = 0$ *:*

Il faut exploiter pour des calculs de ce type : u'.v = [u.v]' – u.v'

$$\overrightarrow{\delta_{G,\,2+3/0}}.\vec{x}_2 = \frac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma_{G,\,2+3/0}}.\vec{x}_2\Big|_0 - \overrightarrow{\sigma_{G,\,2+3/0}}.\frac{d}{dt}\vec{x}_2\Big|_0$$ *(fonctionne car G centre de gravité)*

$$\overrightarrow{\sigma_{G,\,2+3/0}} = \overrightarrow{\sigma_{G,\,2/0}} + \overrightarrow{\sigma_{G,\,3/0}} = \overrightarrow{\sigma_{G,\,3/0}} = I_G(3).\overrightarrow{\Omega_{30}} \text{ avec } \overrightarrow{\Omega_{30}} = \dot{\psi}.\vec{z}_1 + \dot{\theta}.\vec{x}_1 + \dot{\varphi}.\vec{z}_2$$

$$\overrightarrow{\sigma_{G,\,3/0}} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(b2)} .(\dot{\psi}.\sin\theta.\vec{y}_2 + \dot{\theta}.\vec{x}_2 + (\dot{\varphi} + \dot{\psi}.\cos\theta).\vec{z}_2)$$

$$\overrightarrow{\sigma_{G,\,3/0}} = A.\dot{\theta}.\vec{x}_2 + A.\dot{\psi}.\sin\theta.\vec{y}_2 + C.(\dot{\varphi} + \dot{\psi}.\cos\theta).\vec{z}_2$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\delta_{G,\,2+3/0}}.\vec{x}_2 &= A.\ddot{\theta} - (A.\dot{\theta}.\vec{x}_2 + A.\dot{\psi}.\sin\theta.\vec{y}_2 + C.(\dot{\varphi} + \dot{\psi}.\cos\theta).\vec{z}_2).\dot{\psi}.\vec{y}_1 \\ &= A.\ddot{\theta} - (A.\dot{\psi}^2.\sin\theta.\vec{y}_2.\vec{y}_1 + C.\dot{\psi}(\dot{\varphi} + \dot{\psi}.\cos\theta).\vec{z}_2.\vec{y}_1) \\ &= A.\ddot{\theta} - (A.\dot{\psi}^2.\sin\theta.\cos\theta - C.\dot{\psi}(\dot{\varphi} + \dot{\psi}.\cos\theta).\sin\theta)\end{aligned}$$

$$\rightarrow \boxed{A.\ddot{\theta} - A.\dot{\psi}^2.\sin\theta.\cos\theta + C.\dot{\psi}(\dot{\varphi} + \dot{\psi}.\cos\theta).\sin\theta = 0} \qquad (1)$$

Calcul de $\overrightarrow{\delta_{G,\,1+2+3/0}}.\vec{z}_1 = 0$ *:*

Il faut utiliser la encore pour ce calcul une u'.v = [u.v]' – u.v'

$$\overrightarrow{\delta_{G,\,1+2+3/0}}.\vec{z}_1 = \frac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma_{G,\,1+2+3/0}}.\vec{z}_1\Big|_0 - \overrightarrow{\sigma_{G,\,1+2+3/0}}.\frac{d}{dt}\vec{z}_1\Big|_0$$ *(fonctionne car G centre de gravité)*

$$\overrightarrow{\sigma_{G,\,1+2+3/0}} = \overrightarrow{\sigma_{G,\,1/0}} + \overrightarrow{\sigma_{G,\,2/0}} + \overrightarrow{\sigma_{G,\,3/0}} = \overrightarrow{\sigma_{G,\,3/0}} = A.\dot{\theta}.\vec{x}_2 + A.\dot{\psi}.\sin\theta.\vec{y}_2 + C.(\dot{\varphi} + \dot{\psi}.\cos\theta).\vec{z}_2$$

$$\overrightarrow{\delta_{G,\,1+2+3/0}}.\vec{z}_1 = \frac{d}{dt}A.\dot{\psi}.\sin\theta.\vec{y}_2.\vec{z}_1 + C.(\dot{\varphi} + \dot{\psi}.\cos\theta).\vec{z}_2.\vec{z}_1\Big|_0 = \frac{d}{dt}A.\dot{\psi}.\sin^2\theta + C.(\dot{\varphi} + \dot{\psi}.\cos\theta).\cos\theta\Big|_0$$

$$\rightarrow \boxed{A.\dot{\psi}.\sin^2\theta + C.(\dot{\varphi} + \dot{\psi}.\cos\theta).\cos\theta = cte} \qquad (2)$$

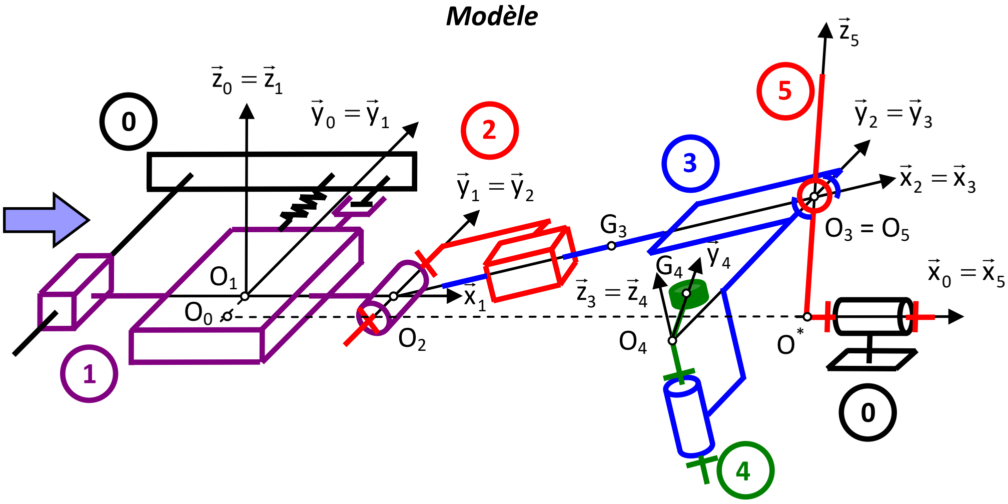
Bilan :
Les équations (1) et (2) correspondent aux lois du mouvement du système :

$$\boxed{A.\ddot{\theta} - A.\dot{\psi}^2.\sin\theta.\cos\theta + C.\dot{\psi}(\dot{\varphi} + \dot{\psi}.\cos\theta).\sin\theta = 0}$$

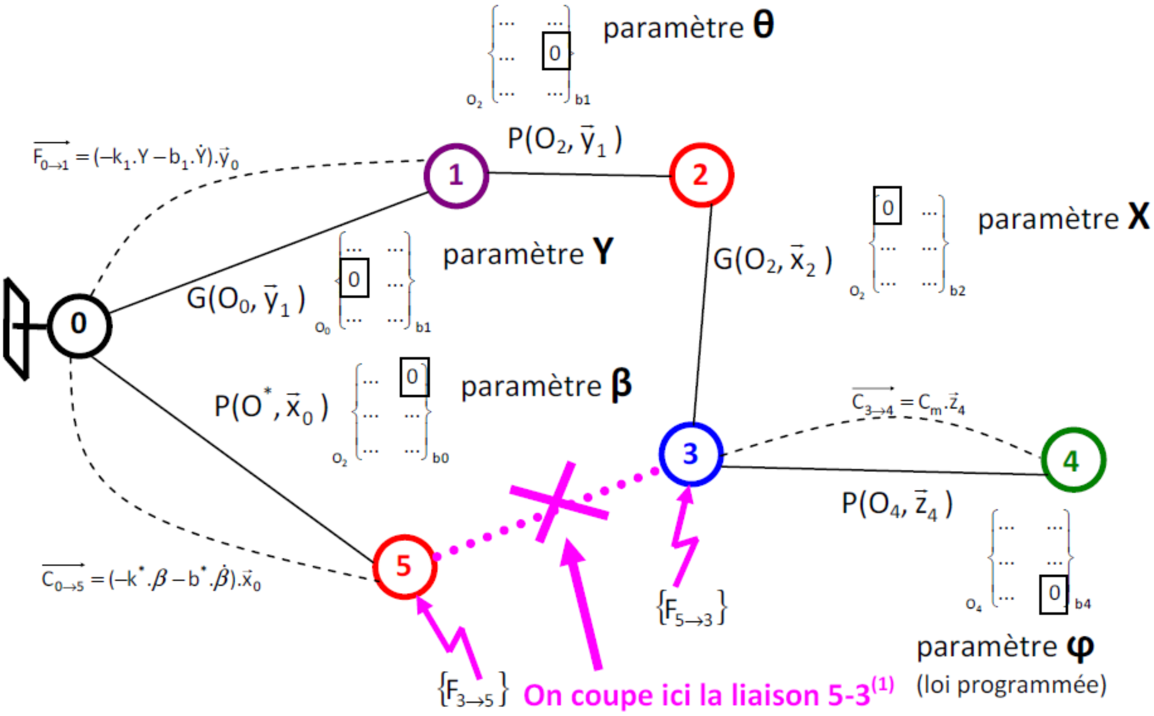
$$\boxed{A.\dot{\psi}.\sin^2\theta + C.(\dot{\varphi} + \dot{\psi}.\cos\theta).\cos\theta = cte}$$

3 EXERCICE 3 : VIBREUR D'OLIVIER (VOIR PARAMETRAGE TD CYCLE 2)

Réel *Modèle*



Le système est une chaine cinématique fermée avec 5 degrés de liberté (5 DDLs) de paramètres : Y, θ, X, φ et β. Pour déterminer les lois du mouvement il faut « ouvrir » cette chaine cinématique. Cela permet d'obtenir ainsi une chaine cinématique « ouverte ».



*On injecte par conséquent 3 inconnues de liaisons supplémentaires dans le système d'équation qui permettra d'obtenir les lois du mouvement → Soit un total de **8** équations à trouver.*

La fermeture géométrique de la boucle permet de lier certain de ces paramètres et d'obtenir les 1ères équations simples (2) :

- $Y = -l_5 . \beta$ *(1)*
- $X = d_0 - l_1 - l_3 = cte$ *(2)*
- $\theta = -\dfrac{l_5}{X + l_3} = cte$ *(3)*

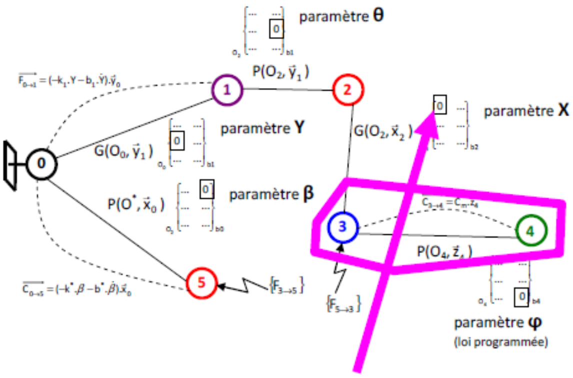
De plus une loi horaire est imposée(3) sur le paramètre φ : $\boxed{\varphi = \Omega . t}$ *avec Ω=cte* *(4)*

Ce qui fait déjà 4 équations sur les 8 recherchées.

En analysant les 4 équations (1), (2), (3) et (4) on constate qu'il y a au final un seul degré de liberté en mouvement de paramètre β et l'équation du mouvement est donc une équation en fonction de β et des ses dérivées.

Pour trouver cette équation, il reste 4 équations à écrire à l'aide du PFD en allant « chercher les 0 » des liaisons :

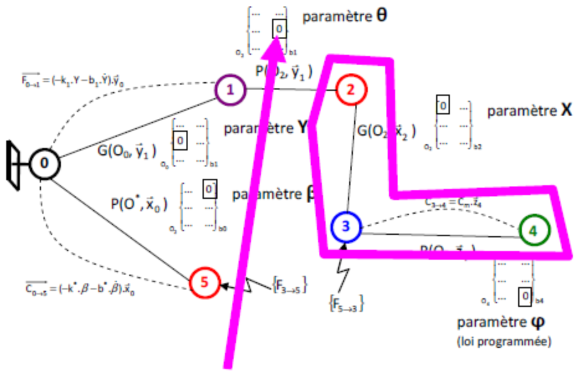
Equation 5 :



On isole 3+4 et on utilise le théorème de la résultante dynamique projeté sur $\vec{x}_2$.

$$\rightarrow \overrightarrow{R_{d,\,3+4/0}}\cdot\vec{x}_2 = \Sigma\overrightarrow{F_{ext\rightarrow 3+4}}\cdot\vec{x}_2$$

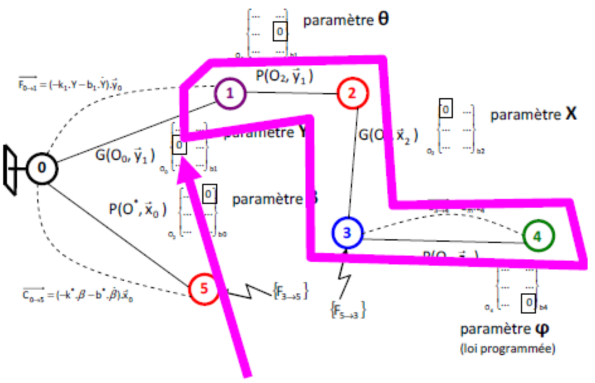
Equation 6 :



On isole 2+3+4 et on utilise le théorème du moment dynamique en O_2 projeté sur $\vec{y}_2$.

$$\rightarrow \overrightarrow{\delta_{O_2,\,2+3+4/0}}\cdot\vec{y}_2 = \Sigma\overrightarrow{M_{O_2,ext\rightarrow 2+3+4}}\cdot\vec{y}_2$$

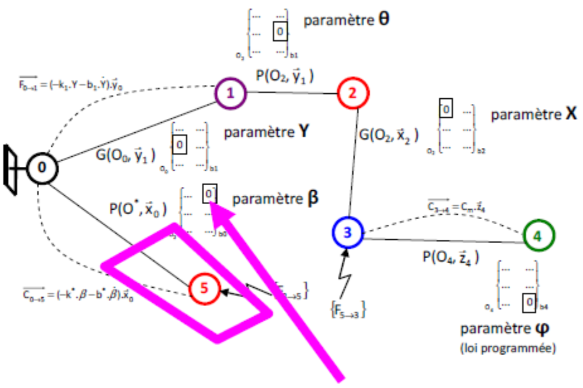
Equation 7 :



On isole 1+2+3+4 et on utilise le théorème de la résultante dynamique projeté sur $\vec{y}_1$.

$$\rightarrow \overrightarrow{R_{d,\,1+2+3+4/0}}\cdot\vec{y}_1 = \Sigma\overrightarrow{F_{ext\rightarrow 1+2+3+4}}\cdot\vec{y}_1$$

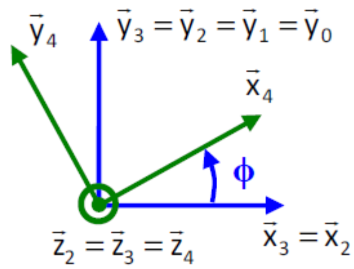
Equation 8 :



On isole 5 et on utilise le théorème du moment dynamique en O projeté sur $\vec{x}_0$.*

$$\rightarrow \overrightarrow{\delta_{O^*,\,5/0}}\cdot\vec{x}_0 = \Sigma\overrightarrow{M_{O^*,ext\rightarrow 5}}\cdot\vec{x}_0$$

1. *Calcul de* $\overrightarrow{R_{d,\,3+4/0}}.\vec{x}_2 = \Sigma\overrightarrow{F_{ext\to 3+4}}.\vec{x}_2$ ***:***



$\overrightarrow{R_{C,\,3+4/0}} = \overrightarrow{R_{C,\,3/0}} + \overrightarrow{R_{C,4/0}}$ *avec :*

$\overrightarrow{R_{C,\,3/0}} = m_3.\overrightarrow{V_{G_3\,3/0}} = m_3.\dot{Y}.\vec{y}_1$

$\overrightarrow{R_{C,\,4/0}} = m_4.\overrightarrow{V_{G_4\,4/0}}$ *où*

$$\overrightarrow{V_{G_4\,4/0}} = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{O_0O_4} + \overrightarrow{O_4G_4})\Big|_0 = \dot{Y}.\vec{y}_1 + e.\frac{d}{dt}\vec{y}_4\Big|_0 = \dot{Y}.\vec{y}_1 - e.\dot{\phi}.\vec{x}_4$$

$$\overrightarrow{R_{C,\,3+4/0}} = (m_3 + m_4).\dot{Y}.\vec{y}_1 - m_4.e.\dot{\phi}.\vec{x}_4$$

$$\overrightarrow{R_{d,3+4/0}}.\vec{x}_2 = \frac{d}{dt}\overrightarrow{R_{c,\,3+4/0}}.\vec{x}_2\Big|_0 - \overrightarrow{R_{c,\,3+4/0}}.\frac{d}{dt}\vec{x}_2\Big|_0$$

$$\overrightarrow{R_{d,3+4/0}}.\vec{x}_2 = \frac{d}{dt}(-m_4.e.\dot{\phi}.\vec{x}_4.\vec{x}_2)\Big|_0 = \frac{d}{dt}(-m_4.e.\dot{\phi}.\cos\phi)\Big|_0 = m_4.e.\dot{\phi}^2.\sin\phi$$

$$\Sigma\overrightarrow{F_{ext\to 3+4}}.\vec{x}_2 = X_{53} \rightarrow \boxed{m_4.e.\dot{\phi}^2.\sin\phi = X_{53}} \qquad (5)$$

2. *Calcul de* $\overrightarrow{\delta_{O_2,\,2+3+4/0}}.\vec{y}_2 = \Sigma\overrightarrow{M_{O_2,ext\to 2+3+4}}.\vec{y}_2$ ***:***

$\overrightarrow{\delta_{O_2,2+3+4/0}}.\vec{y}_2 = \overrightarrow{\delta_{O_2,\,4/0}}.\vec{y}_2$ *car 2/0 et 3/0 mouvements de translation suivant* $\vec{y}_2$

$$\overrightarrow{\sigma_{G_4,\,4/0}} = I_{G_4}(S_4).\overrightarrow{\Omega_{40}} = \begin{pmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & B_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 \end{pmatrix}_{(b4)} .\dot{\phi}.\vec{z}_4 = C_4.\dot{\phi}.\vec{z}_4$$

$$\overrightarrow{\delta_{G_4,\,4/0}} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma_{G_4,\,4/0}}\Big|_0 = C_4.\ddot{\phi}.\vec{z}_4$$

$\overrightarrow{\delta_{O_2,\,4/0}} = \overrightarrow{\delta_{G_4,\,4/0}} + \overrightarrow{O_2G_4} \wedge \overrightarrow{R_{d,\,4/0}}$ *avec :*

$$\overrightarrow{O_2G_4} \wedge \overrightarrow{R_{d,\,4/0}} = ((X + l_3).\vec{x}_2 - d.\vec{y}_2 + e.\vec{y}_4) \wedge (m_4.\ddot{Y}.\vec{y}_1 - m_4.e.\dot{\phi}^2.\vec{y}_4)$$
$$= m_4.\ddot{Y}.(X + l_3).\vec{z}_2 - m_4.e.\dot{\phi}^2.(X + l_3).\cos\phi.\vec{z}_2 + m_4.d.e.\dot{\phi}^2.\sin\phi.\vec{z}_2 - m_4.\ddot{Y}.e.\sin\phi.\vec{z}_2$$

Or $\vec{z}_2 = \vec{z}_3 = \vec{z}_4$ d'où $\overrightarrow{\delta_{O_2,\,4/0}}.\vec{y}_2 = 0$

$$\Sigma\overrightarrow{M_{O_2,ext\to 2+3+4}}.\vec{y}_2 = \overrightarrow{M_{O_2,5\to 3}}.\vec{y}_2 + \overrightarrow{M_{O_2,1\to 2}}.\vec{y}_2$$

$$\{F_{5\to 3}\} = {}_{O_3}\begin{Bmatrix} X_{53} & \lambda.\dot{\beta}.\cos\theta \\ Y_{53} & 0 \\ Z_{53} & \lambda.\dot{\beta}.\sin\theta \end{Bmatrix}_{(b2)} \rightarrow \overrightarrow{M_{O_2,5\to 3}}.\vec{y}_2 = \left(\overrightarrow{M_{O_3,5\to 3}} + \overrightarrow{O_2O_3} \wedge (X_{53}.\vec{x}_2 + Y_{53}.\vec{y}_2 + Z_{53}.\vec{z}_2)\right)\vec{y}_2$$

$$\overrightarrow{M_{O_2,5\to3}}.\vec{y}_2=\left[(X+l_3).\vec{x}_2\wedge(X_{53}.\vec{x}_2+Y_{53}.\vec{y}_2+Z_{53}.\vec{z}_2)\right].\vec{y}_2=-(X+l_3).Z_{53}$$

$$\overrightarrow{\delta_{O_2,\,2+3+4/0}}.\vec{y}_2=\Sigma\overrightarrow{M_{O_2,ext\to2+3+4}}.\vec{y}_2\ \to\ -(X+l_3).Z_{53}=0\ \to\ \boxed{Z_{53}=0}\qquad(6)$$

3. Calcul de $\overrightarrow{R_{d,\,1+2+3+4/0}}.\vec{y}_1=\Sigma\overrightarrow{F_{ext\to1+2+3+4}}.\vec{y}_1$ **:**

$$\overrightarrow{R_{C,1+2+3+4/0}}=(m_1+m_2+m_3+m_4).\dot{Y}.\vec{y}_1-m_4.e.\dot{\phi}.\vec{x}_4$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{R_{d,1+2+3+4/0}}.\vec{y}_1&=\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{R_{C,1+2+3+4/0}}.\vec{y}_1\right)\Big|_0-\overrightarrow{R_{C,1+2+3+4/0}}.\frac{d}{dt}\vec{y}_1\Big|_0=\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{R_{C,1+2+3+4/0}}.\vec{y}_1\right)\Big|_0\\&=\frac{d}{dt}\left((m_1+m_2+m_3+m_4).\dot{Y}-m_4.e.\dot{\phi}.\vec{x}_4.\vec{y}_1\right)\Big|_0=(m_1+m_2+m_3+m_4).\ddot{Y}-\frac{d}{dt}m_4.e.\dot{\phi}.\sin\phi\Big|_0\\&=(m_1+m_2+m_3+m_4).\ddot{Y}-m_4.e.\dot{\phi}^2.\cos\phi\end{aligned}$$

$$\Sigma\overrightarrow{F_{ext\to1+2+3+4}}.\vec{y}_1=-k_1.Y-b_1.\dot{Y}+Y_{53}$$

$$\overrightarrow{R_{d,\,1+2+3+4/0}}.\vec{y}_1=\Sigma\overrightarrow{F_{ext\to1+2+3+4}}.\vec{y}_1\ \to\ \boxed{(m_1+m_2+m_3+m_4).\ddot{Y}-m_4.e.\dot{\phi}^2.\cos\phi=-k_1.Y-b_1.\dot{Y}+Y_{53}}\quad(7)$$

4. Calcul de: $\overrightarrow{\delta_{O^*,\,5/0}}.\vec{x}_0=\Sigma\overrightarrow{M_{O^*,ext\to5}}.\vec{x}_0$ **:**

$$\overrightarrow{\delta_{O^*,\,5/0}}.\vec{x}_0=\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{\sigma_{O^*,\,5/0}}.\vec{x}_0\right)\Big|_0-\overrightarrow{\sigma_{O^*,\,5/0}}.\frac{d}{dt}\vec{x}_0\Big|_0=\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{\sigma_{O^*,\,5/0}}.\vec{x}_0\right)\Big|_0$$

$$\overrightarrow{\sigma_{O^*,\,5/0}}=I_{O^*}(S_5).\overrightarrow{\Omega_{50}}=\begin{pmatrix}A_5&0&0\\0&B_5&0\\0&0&C_5\end{pmatrix}_{(b5)}.\dot{\beta}.\vec{x}_5=A_5.\dot{\beta}.\vec{x}_5\ \to\ \overrightarrow{\delta_{O^*,5/0}}.\vec{x}_0=A_5.\ddot{\beta}$$

$$\Sigma\overrightarrow{M_{O^*,ext\to5}}.\vec{x}_0=-k^*.\beta-b^*.\dot{\beta}+\overrightarrow{M_{O^*,3\to5}}.\vec{x}_0$$

$$\{F_{5\to3}\}=\underset{O_3}{\begin{Bmatrix}X_{53}&\lambda.\dot{\beta}.\cos\theta\\Y_{53}&0\\Z_{53}&\lambda.\dot{\beta}.\sin\theta\end{Bmatrix}}_{(b2)}\ \to\ \overrightarrow{M_{O^*,3\to5}}.\vec{x}_0=\left(\overrightarrow{M_{O_3,5\to3}}+\overrightarrow{O^*O_3}\wedge-(X_{53}.\vec{x}_2+Y_{53}.\vec{y}_2+Z_{53}.\vec{z}_2)\right).\vec{x}_0$$

$$\overrightarrow{M_{O^*,3\to5}}.\vec{x}_0=-\lambda.\dot{\beta}+\left(l_5.\vec{z}_5\wedge-(X_{53}.\vec{x}_2+Y_{53}.\vec{y}_2)\right).\vec{x}_0=-\lambda.\dot{\beta}-l_5.X_{53}.\sin\beta.\sin\theta+l_5.Y_{53}.\cos\beta$$

$$-l_5.X_{53}.\vec{z}_5\wedge\vec{x}_2=-l_5.X_{53}.(-\sin\beta.\vec{y}_0+\cos\beta.\vec{z}_0)\wedge\vec{x}_2=-l_5.X_{53}.\sin\beta.\vec{z}_2-l_5.X_{53}.\cos\beta.\cos\theta.\vec{y}_2$$

$$\overrightarrow{\delta_{O^*,5/0}}.\vec{x}_0=\Sigma\overrightarrow{M_{O^*,ext\to5}}.\vec{x}_0\ \to\ \boxed{A_5.\ddot{\beta}=-k^*.\beta-b^*.\dot{\beta}-\lambda.\dot{\beta}-l_5.X_{53}.\sin\beta.\sin\theta+l_5.Y_{53}.\cos\beta}\qquad(8)$$

Au final : En utilisant les équations (1), (4), (7) et (8) :

$(m_1+m_2+m_3+m_4).\ddot{Y}-m_4.e.\dot{\phi}^2.\cos\phi=-k_1.Y-b_1.\dot{Y}+Y_{53}$

$A_5.\ddot{\beta}=-k^*.\beta-b^*.\dot{\beta}-\lambda.\dot{\beta}-l_5.Y_{53}.\cos\beta \rightarrow A_5.\ddot{\beta}=-k^*.\beta-b^*.\dot{\beta}-\lambda.\dot{\beta}+l_5.Y_{53}$ *(avec l'hypothèse β angle petit, on considère que $l_5.\cos\beta=l_5$ et $l_5.\sin\beta.\sin\theta$ négligeable devant l_5)*

$Y=-l_5.\beta \rightarrow \dot{Y}=-l_5.\dot{\beta} \rightarrow \ddot{Y}=-l_5.\ddot{\beta}$

$\phi=\Omega.t$

On obtient :

$-(m_1+m_2+m_3+m_4).l_5.\ddot{\beta}-m_4.e.\Omega^2.\cos\Omega.t-k_1.l_5.\beta-b_1.l_5.\dot{\beta}=Y_{53}$

Et $\frac{1}{l_5}.(A_5.\ddot{\beta}+k^*.\beta+b^*.\dot{\beta}+\lambda.\dot{\beta})=Y_{53}$

$\rightarrow -(m_1+m_2+m_3+m_4).l_5^2.\ddot{\beta}-m_4.l_5.e.\Omega^2.\cos\Omega.t-k_1.l_5^2.\beta-b_1.l_5^2.\dot{\beta}=A_5.\ddot{\beta}+k^*.\beta+b^*.\dot{\beta}+\lambda.\dot{\beta}$

$(m_1+m_2+m_3+m_4).l_5^2.\ddot{\beta}+k_1.l_5^2.\beta+b_1.l_5^2.\dot{\beta}+A_5.\ddot{\beta}+k^*.\beta+b^*.\dot{\beta}+\lambda.\dot{\beta}=-m_4.l_5.e.\Omega^2.\cos\Omega.t$

Soit la loi du mouvement :

$$\boxed{\left(A_5+(m_1+m_2+m_3+m_4).l_5^2\right).\ddot{\beta}+(b^*+b_1.l_5^2+\lambda).\dot{\beta}+(k_1.l_5^2+k^*).\beta=-m_4.l_5.e.\Omega^2.\cos\Omega.t}$$