

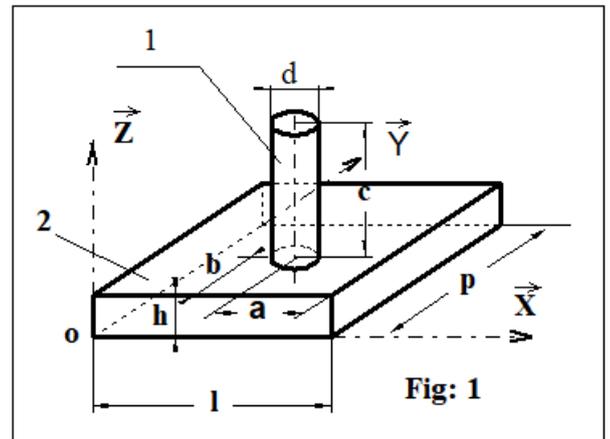
**CHAPITRE 1**  
**GEOMETRIE DES MASSES**

**1 EXERCICE 1 :**

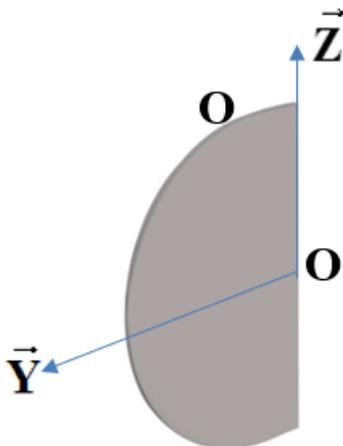
1/ Soit le solide homogène ci-dessous comprenant les formes (1) et (2). Déterminer les coordonnées du centre de gravité dans le repère  $(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ .

AN:  $l = 110$  ;  $p = 60$  ;  $h = 20$  ;  $a = 30$  ;  $b = 20$  ;  
 $c = 50$  ;  $d = 20$ .

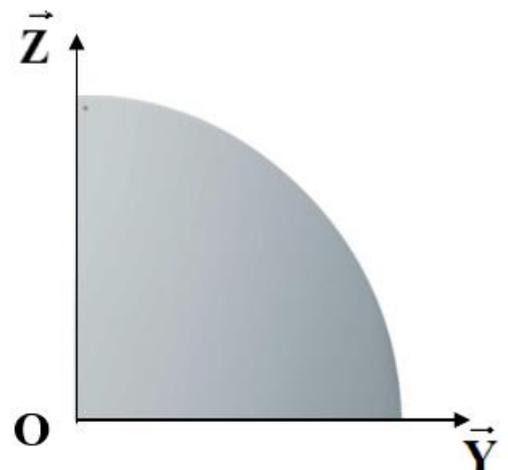
Pour les exercices 2 à 4, déterminer les coordonnées du centre de gravité dans le repère  $(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ . Les solides sont homogènes de rayon R.



2/ Demi plaque circulaire d'épaisseur négligeable



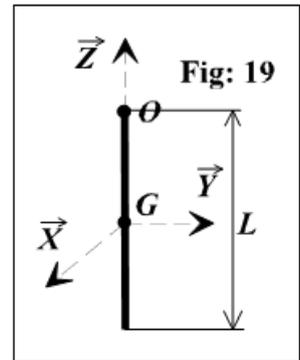
3/ Quart de plaque circulaire d'épaisseur négligeable



**2 EXERCICE 2 : TIGE RECTILIGNE**

Une tige ( $T$ ) est définie par:

- sa longueur  $L$
- sa masse  $m$
- son centre de gravité  $G$   
(les dimensions de sa section transversale sont négligeables)
- On définit le repère  $R = (G, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$  lié à la tige, la tige étant sur  $(G, \vec{Z})$ .



a/ Déterminer la matrice d'inertie de la tige ( $T$ ) en  $G$  dans le repère  $R$ .

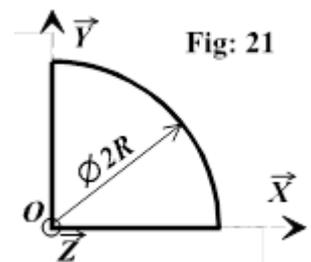
b/ Déterminer le moment d'inertie de la tige ( $T$ ) par rapport à l'axe  $(G, \vec{u})$  défini par  $\vec{u} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \vec{Y} + \frac{1}{2} \cdot \vec{Z}$

c/ Déterminer la matrice d'inertie de la tige ( $T$ ) en  $O$  dans le repère  $(O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ ,  $O$  étant défini par  $\vec{GO} = \frac{L}{2} \cdot \vec{Z}$ .

**3 EXERCICE 3 : MATRICE D'INERTIE D'UNE PLAQUE 1/4 DE CERCLE**

Soit une plaque mince en forme de quart de disque de masse  $m$ .

- a/ Déterminer la matrice d'inertie dans le repère  $R = (O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ .
- b/ Déterminer le repère principal d'inertie et calculer la matrice principale d'inertie.



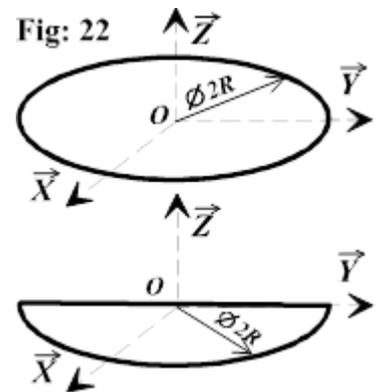
**4 EXERCICE 4 : MATRICE D'INERTIE D'UNE PLAQUE CIRCULAIRE**

Soit un repère  $R = (O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$  lié à un solide d'épaisseur négligeable, homogène, de masse  $m$ , l'axe

$(O, \vec{Z})$  étant perpendiculaire à la plaque.

Déterminer la matrice d'inertie par rapport au repère  $R$  dans les cas suivants :

- a/ Le solide est une plaque circulaire de centre  $O$ , de rayon  $R$ .
- b/ Le solide est une plaque ayant la forme d'un 1/2 disque de centre  $O$ , de rayon  $R$ , d'axe de symétrie  $(O, \vec{X})$ .
- c) Le solide est un anneau (ou une jante) de centre  $O$ , de rayon  $R$ .



**5 EXERCICE 5 : MATRICE D'INERTIE D'UN CYLINDRE**

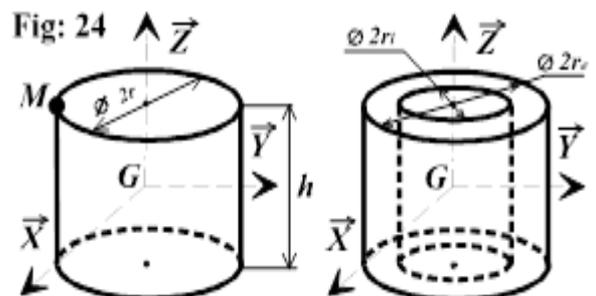
Soit un cylindre ( $S$ ) de rayon  $r$ , de hauteur  $h$ , plein et homogène, de masse  $m$  et de centre d'inertie  $G$ .

On définit le repère  $R = (G, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ , l'axe  $(G, \vec{Z})$  étant l'axe du cylindre.

a/ Déterminer la matrice d'inertie de ( $S$ ) au point  $G$  dans le repère  $R$ .

b/ Déterminer la matrice d'inertie de ( $S$ ) au point  $M$  dans le repère  $(M, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ ,  $M$  étant défini par:

$$\vec{GM} = -r \vec{Y} + \frac{h}{2} \vec{Z}$$



c/ La figure 24 définit un tube de masse  $m$ . Déterminer la matrice d'inertie du tube dans le repère  $(G, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ .

## 6 EXERCICE 6 : PANNEAUX DEROULANTS

Le panneau publicitaire déroulant, appartenant à la catégorie des MUPI (Mobilier Urbain Pour l'Information), est un objet installé dans l'espace public. C'est un media de masse qui permet de toucher le consommateur sur son lieu de vie. La société JC DECAUX qui installe des mobiliers urbains fixes s'est intéressée depuis longtemps à pouvoir toucher un maximum de personnes grâce à l'utilisation de ces panneaux. Le système étudié est le système de panneau type sénior de 8m<sup>2</sup> qui équipe de nombreuses villes dont Paris.

Ce panneau permet de faire défiler successivement dans un sens puis dans l'autre jusqu'à 7 affiches avec un temps d'exposition constant pour chaque affiche.

### Mise en situation

Le format des affiches rétro éclairées est d'environ 8m<sup>2</sup>.

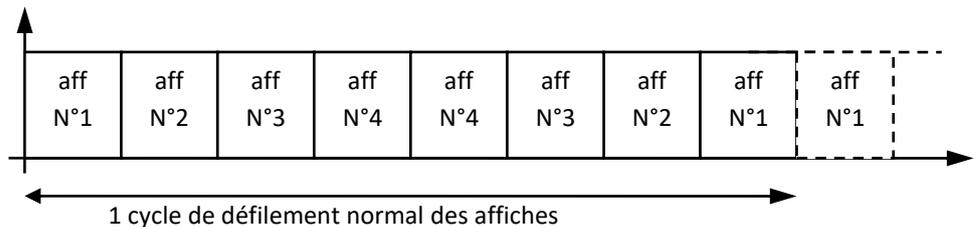
Les affiches sont de dimensions : 3200 x 2300 mm (largeur x hauteur) avec une surface visible de 3060 x 2230 mm.

Le dispositif est constitué de deux rouleaux (longueur 3200mm et Ø 140mm).

Le défilement s'effectue à la vitesse de 1m/s avec une rampe d'accélération et de décélération de chacune 1 seconde.



Le cycle de défilement pour 4 affiches est le suivant :

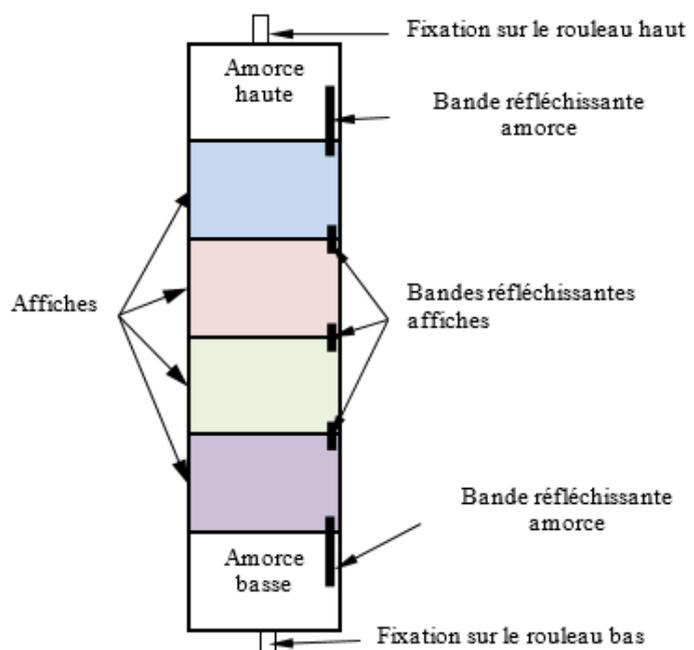


Le temps d'exposition est programmable à distance via un module GSM (Wacom) relié à un automate programmable (Siemens). Ce temps d'exposition est modifiable suivant les termes du contrat avec l'annonceur.

Les affiches étant changées tous les 15 jours, il faut faciliter leur mise en place. Pour cela, elles sont disposées en bandeau et placées sur le rouleau du haut lors de leur installation. La première est une amorce fixée au rouleau du haut avec un adhésif puis elles sont reliées les unes aux autres par un système de zip. La dernière est une amorce qui est également fixée au rouleau du bas par un adhésif.

Cet ensemble constitue un bandeau.

Dans la solution actuelle, l'entraînement se fait par deux moteurs asynchrones identiques commandés par deux variateurs scalaires. L'ensemble est géré par l'automate programmable.



## ÉTUDE DE L'EXIGENCE 11 « ENROULER OU DEROULER L'AFFICHE »

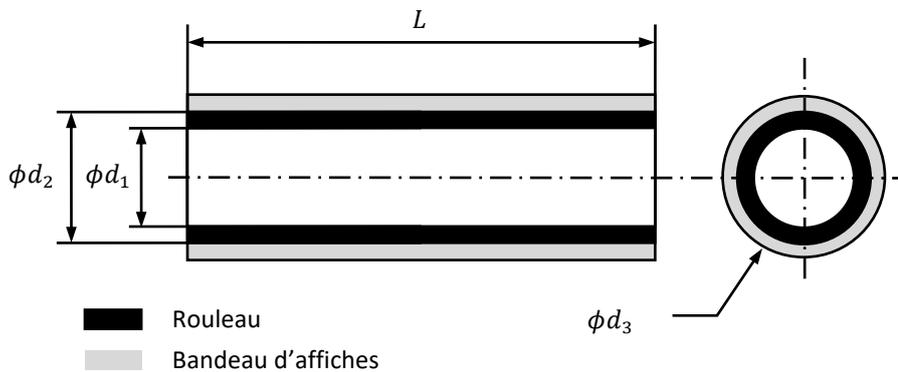
On s'intéresse ici au rouleau supérieur du panneau d'affichage et on considère que le bandeau d'affiches s'enroule sur ce rouleau supérieur.

L'étude du comportement dynamique du système nous amène à chercher les inerties de ces différents éléments et à déterminer si l'évolution de la vitesse angulaire des rouleaux pendant les phases d'enroulement et de déroulement du bandeau d'affiches respecte le cahier des charges fonctionnel

### Calcul de l'inertie du rouleau et du bandeau d'affiches

#### Hypothèses :

- le rouleau supérieur vide est un cylindre creux en aluminium de longueur  $L$ , de diamètre intérieur  $d_1$  et de diamètre extérieur  $d_2$  ;
- une fois entièrement enroulé autour du rouleau supérieur, le bandeau d'affiches est un cylindre creux de longueur  $L$ , de diamètre intérieur  $d_2$  et de diamètre extérieur  $d_3$ .



$$L = 3200 \text{ mm}$$

#### Rouleau :

Masse volumique :  $\rho_{roul} = 2700 \text{ kg.m}^{-3}$

$$\phi d_1 = 129 \text{ mm}$$

$$\phi d_2 = 140 \text{ mm}$$

#### Bandeau d'affiches :

Masse volumique :  $\rho_b = 1500 \text{ kg.m}^{-3}$

$$\phi d_2 = 140 \text{ mm}$$

$$\phi d_3 = 152 \text{ mm}$$

On note :

- $J_{roul}$  : moment d'inertie du rouleau supérieur vide par rapport à son axe ;
- $J_b$  : moment d'inertie du bandeau d'affiches enroulées par rapport à l'axe du rouleau sur lequel il est enroulé.

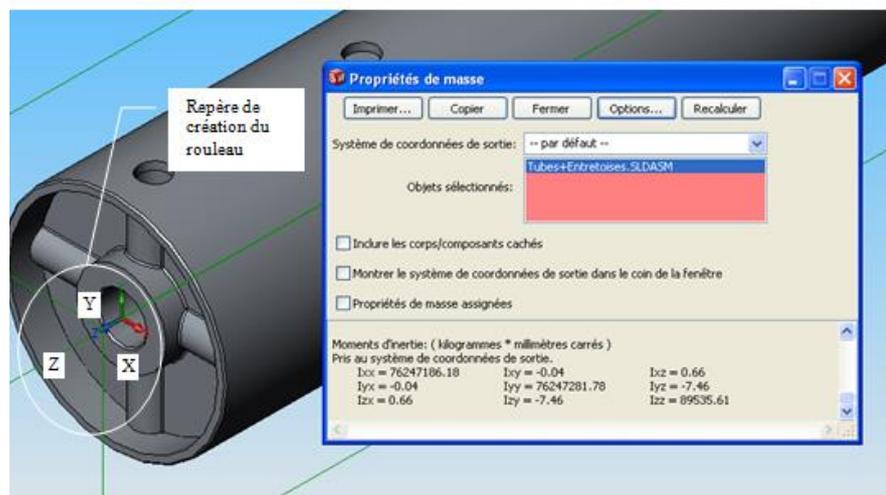
1. Donner l'expression de  $J_{roul}$  en fonction de  $\rho_{roul}$ ,  $L$ ,  $d_1$  et  $d_2$ . Calculer  $J_{roul}$ .

On donne ci-dessous le modèle volumique du rouleau supérieur vide accompagné de ses propriétés de masse.

2. En utilisant le tableau des propriétés de masse du modèle volumique, donner la valeur de  $J_{roul \text{ modèle}}$  (moment d'inertie du modèle du rouleau vide par rapport à son axe).

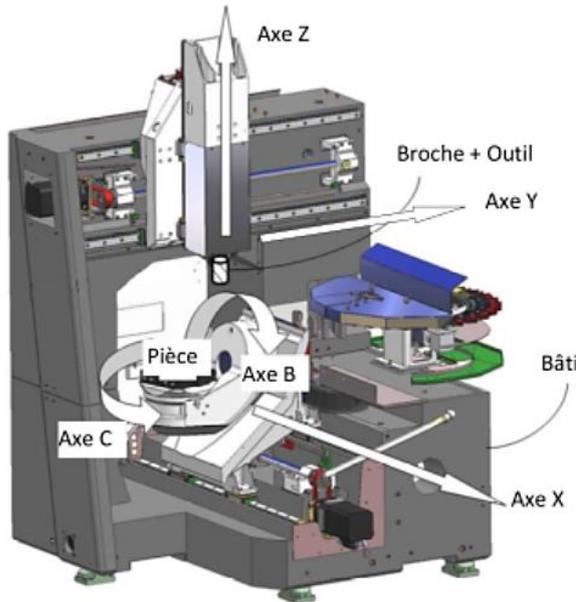
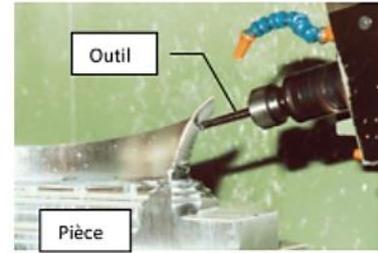
3. Donner l'expression de  $J_b$  en fonction de  $\rho_b$ ,  $L$ ,  $d_2$  et  $d_3$ . Calculer  $J_b$ .

4. Quel est le domaine de variation de l'inertie du rouleau par rapport à son axe depuis le rouleau vide jusqu'au rouleau chargé du bandeau d'affiches ?



## 7 EXERCICE 7 : CHARGEUR D'OUTILS DE MOCN

L'usinage est une opération de transformation d'un produit par enlèvement de matière. Cette opération est à la base de la fabrication de produits dans les industries mécaniques. On appelle le moyen de production associé à une opération d'usinage une machine outil ou un centre d'usinage. La génération d'une surface par enlèvement de matière est obtenue grâce à différents outils munis d'au moins une arête coupante.

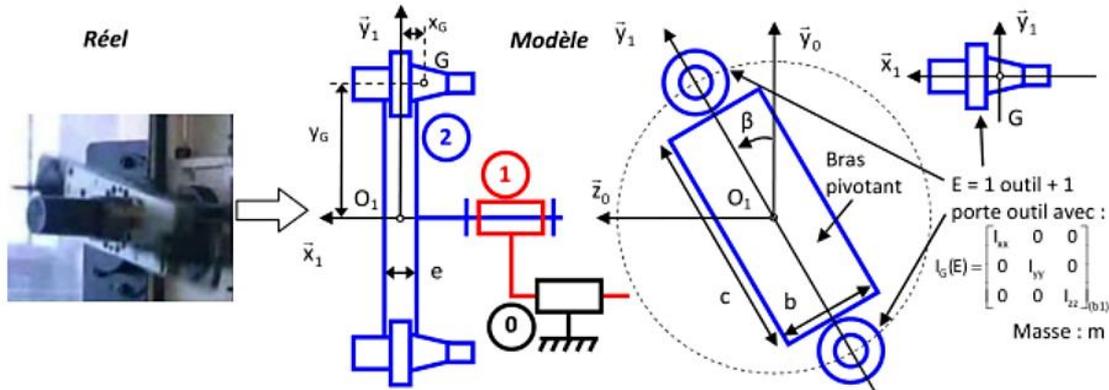


Un chargeur d'outils est un système permettant de charger automatiquement l'outil utile stocké dans un magasin sur la broche pour une phase d'usinage donnée. Les différentes formes de pièces sont ensuite obtenues par des translations et des rotations de l'outil par rapport à la pièce à usiner.



Exemple de pièce complexe obtenue par usinage

On s'intéresse donc au chargeur d'outils équipant la machine outils dont on donne une description structurelle ainsi qu'une modèle cinématique. Pour déterminer le couple moteur et résoudre les problèmes d'équilibrage, il est nécessaire de déterminer la matrice d'inertie de l'ensemble tournant 2.



**Q.1.** Déterminer la matrice d'inertie de l'ensemble 2 lorsque le bras est équipé de 2 outils montés symétriquement.

**Q.2.** Déterminer la matrice d'inertie de l'ensemble 2 lorsque le bras n'est équipé que d'un seul outil.

**8 REPONSES :****Exo 1 :**

1/  $\vec{OG} = 57,6\vec{X} + 28,8\vec{Y} + 14\vec{Z}$

2/  $\vec{OG} = \frac{4R}{3\pi}\vec{Y}$

3/  $\vec{OG} = \frac{4R}{3\pi}(\vec{Y} + \vec{Z})$

**Exo 2 :**

a/  $(\mathbf{I}_o(S))_R = \frac{ml^2}{12} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  b/  $\mathbf{I}_o(S/\vec{u}) = \frac{ml^2}{16}$

c/  $(\mathbf{I}_o(S))_R = \frac{ml^2}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

**Exo 3 :**

a/  $(\mathbf{I}_o(S))_R = \frac{mR^2}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{\pi} & 0 \\ -\frac{1}{\pi} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b/ Base principale  $(O, \vec{U}, \vec{V}, \vec{Z})$  avec  $(\vec{X}, \vec{U}) = \frac{\pi}{4}$ 

$$(\mathbf{I}_o(S))_{(O, \vec{U}, \vec{V}, \vec{Z})} = \frac{mR^2}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(O, \vec{U}, \vec{V}, \vec{Z})}$$

**Exo 4 :**

a et b/  $(\mathbf{I}_o(S))_R = \frac{mR^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

c/  $(\mathbf{I}_o(S))_R = \frac{mR^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

**Exo 5 :**

a/  $(\mathbf{I}_G(S))_R = \frac{m}{12} \begin{pmatrix} 3r^2 + h^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3r^2 + h^2 & 0 \\ 0 & 0 & 6r^2 \end{pmatrix}$

b/  $(\mathbf{I}_M(S))_R = \frac{m}{12} \begin{pmatrix} 15r^2 + 4h^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3r^2 + 4h^2 & 6rh \\ 0 & 6rh & 18r^2 \end{pmatrix}$

c/

$$(\mathbf{I}_G(S))_R = \frac{m}{12} \begin{pmatrix} 3(r_e^2 + r_i^2) + h^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3(r_e^2 + r_i^2) + h^2 & 0 \\ 0 & 0 & 6(r_e^2 + r_i^2) \end{pmatrix}$$

**Exo 6 : PANNEAUX DEROULANTS**

1 Par définition :  $J_{roul} = \int_{P \in S} r^2 dm$  avec  $dm = \rho_{roul} dv$

En coordonnées cylindriques :  $dv = r d\theta dr dz$  avec  $\begin{cases} \theta \in [0, 2\pi] \\ z \in [0, L] \\ r \in [r_1, r_2] \end{cases}$

On a donc  $J_{roul} = \rho_{roul} \int_0^L dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_{r_1}^{r_2} r^3 dr = 2\pi \rho_{roul} L \frac{r_2^4 - r_1^4}{4}$

D'où :  $J_{roul} = \pi \rho_{roul} L \frac{d_2^4 - d_1^4}{32}$

AN :  $J_{roul} = \pi \times 2700 \times 3,2 \times \frac{0,14^4 - 0,129^4}{32} = 9,096 \times 10^{-2} kg.m^2 = 9,096 \times 10^4 kg.mm^2$

2  $J_{roul \text{ modèle}}$  correspond à  $I_{zz}$  de la matrice d'inertie.

$J_{roul \text{ modèle}} = 89535,61 kg.mm^2 = 8,9.10^{-2} kg.m^2$

3 De même que pour Q1 :  $J_b = \pi \rho_b L \frac{d_3^4 - d_2^4}{32}$

AN :  $J_b = \pi \times 1500 \times 3,2 \times \frac{0,152^4 - 0,14^4}{32} = 7,051 \times 10^{-2} kg.m^2 = 7,051 \times 10^4 kg.mm^2$

4. L'inertie du rouleau évolue donc entre  $J_{roul}$  et  $J_{roul} + J_b$ . AN :  $[9,1.10^{-2}; 16,2.10^{-2}] kg.m^2$

**Exo 7 : Chargeur d'outils de MOCN**

**Q.1.** L'ensemble 2 = bras pivotant + 2 outils montés symétriquement possède 2 plans de symétrie

perpendiculaires → la matrice d'inertie de l'ensemble est diagonale →  $I_{O_1}(2) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(b1)}$



la matrice d'inertie de la plaque de centre de gravité  $O_1$  est :

$$I_{O_1}(S) = \begin{bmatrix} \frac{m}{12} \cdot (b^2 + c^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12} \cdot (e^2 + b^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12} \cdot (c^2 + e^2) \end{bmatrix}_{(b1)}$$

$b_1$  est ici base principale.

Un outil + son porte outil constitue l'ensemble E de centre de gravité G et sa matrice d'inertie est :

$$I_G(E) = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}_{(b1)}$$

Il faut transporter la matrice d'inertie en  $O_1$  pour faire l'assemblage.  
(Seuls les termes diagonaux sont à calculer puisque la matrice finale est diagonale).

$$\begin{aligned} A &= I_{xx} + m \cdot y_G^2 \\ B &= I_{yy} + m \cdot x_G^2 \\ C &= I_{zz} + m \cdot (y_G^2 + x_G^2) \end{aligned}$$

On assemble la mes matrices exprimées dans la même base et au même point.

$$I_{O_1}(2) = \begin{bmatrix} \frac{m}{12} \cdot (b^2 + c^2) + 2 \cdot I_{xx} + 2 \cdot m \cdot y_G^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12} \cdot (e^2 + b^2) + 2 \cdot I_{yy} + 2 \cdot m \cdot x_G^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12} \cdot (c^2 + e^2) + 2 \cdot I_{zz} + 2 \cdot m \cdot (y_G^2 + x_G^2) \end{bmatrix}_{(b1)}$$

**Q.2.** L'ensemble 2 = bras pivotant + 1 outil possède 1 plan de symétrie (plan  $(O_1, \bar{x}_1, \bar{y}_1)$ ) → L'axe  $(O_1, \bar{z}_1)$  est

axe principal d'inertie →  $D = E = 0 \rightarrow I_{O_1}(2) = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(b1)}$

On décompose en solides élémentaires

la matrice d'inertie de la plaque de centre de gravité  $O_1$  reste la même que question 1.

Un outil + son porte outil constitue l'ensemble E de centre de gravité G et sa matrice d'inertie est :

$$I_G(E) = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}_{(b1)}$$

Il faut transporter la matrice d'inertie en  $O_1$  pour faire l'assemblage.

$I_{O_1}(S) = I_G(E) + I_{O_1}(m \rightarrow G)$  avec :

$$I_{O_1}(m \rightarrow G) = m \cdot \begin{bmatrix} y_G^2 & -x_G \cdot y_G & 0 \\ -x_G \cdot y_G & x_G^2 & 0 \\ 0 & 0 & (y_G^2 + x_G^2) \end{bmatrix}_{(b1)}$$

$$I_G(E) = \begin{bmatrix} I_{xx} + m \cdot y_G^2 & -m \cdot x_G \cdot y_G & 0 \\ -m \cdot x_G \cdot y_G & I_{yy} + m \cdot x_G^2 & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} + m \cdot (y_G^2 + x_G^2) \end{bmatrix}_{(b1)}$$

On assemble la mes matrices exprimées dans la même base et au même point.

$$I_{O_1}(2) = \begin{bmatrix} \frac{m}{12} \cdot (b^2 + c^2) + I_{xx} + m \cdot y_G^2 & -m \cdot x_G \cdot y_G & 0 \\ -m \cdot x_G \cdot y_G & \frac{m}{12} \cdot (e^2 + b^2) + I_{yy} + m \cdot x_G^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12} \cdot (c^2 + e^2) + I_{zz} + m \cdot (y_G^2 + x_G^2) \end{bmatrix}_{(b1)}$$