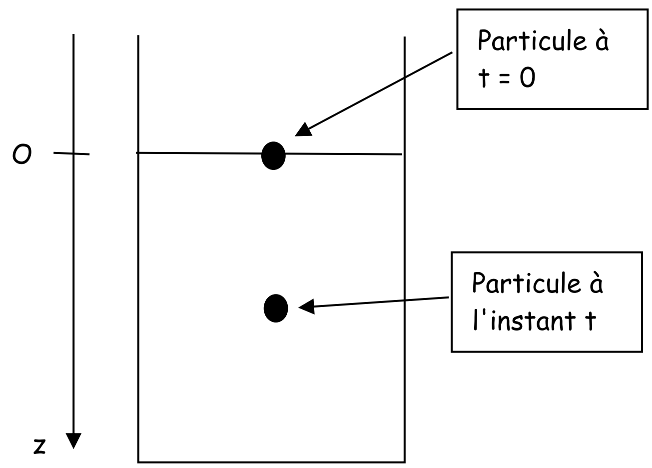
I- *MOUVEMENT OSCILLANT.*

Un objet de masse m est suspendu à un ressort vertical de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. L'objet est écarté de sa position d'équilibre d'une distance a puis est lâché sans vitesse initiale.
Rappel : intensité de la force de rappel d'un ressort $F = k.(\ell - \ell_0)$.
1°) Déterminer la longueur du ressort dans sa position d'équilibre.
2°) En notant (Oz) l'axe vertical ascendant, établir l'équation différentielle du mouvement en appliquant les lois de Newton de la mécanique.
3°) Résoudre cette équation et en déduire l'évolution de l'altitude t → z(t).

II- *PRINCIPE DE FONCTIONNEMENT D'UN BAC A DECANTATION A FLUX HORIZONTAL*

1. Étude de la chute d'une particule dans un liquide visqueux :

On prépare un mélange homogène constitué d'un liquide de masse volumique $\rho_l = 1{,}0 \times 10^3$ kg.m^{-3} et de particules solides de forme sphérique de rayon $R = 2{,}0 \times 10^{-6}$ m, de masse volumique $\rho_S = 1{,}5 \times 10^3$ kg.m^{-3} et de masse $m = 5{,}0 \times 10^{-14}$ kg.
On dépose, à la date t = 0 s, une fine couche (dont on néglige l'épaisseur) de ce mélange homogène à la surface d'un récipient contenant le même liquide, à l'état pur, que le mélange précédent.
A partir de cet instant, les particules, que l'on suppose initialement au repos, se déplacent verticalement vers le fond du récipient.
On suppose que la vitesse limite est suffisamment faible.



Dans cette hypothèse, les particules sont soumises à leur poids $\vec{P}$, à la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$ et à une force de frottement $\vec{F} = -f.\vec{v}$ où f vaut $3{,}1 \times 10^{-12}$kg.s^{-1} et représente le coefficient de frottement. On donne g = 9,8 N.kg^{-1}.
Pour étudier le mouvement de la particule, on se place dans un repère unidimensionnel d'axe Oz vertical et dirigé vers le bas, d'origine O au niveau de la surface libre du liquide.

1.1. En effectuant une analyse dimensionnelle, vérifier que l'unité du coefficient de frottement est bien le kg.s^{-1}.

1.2. Compléter la figure ci-contre en faisant figurer les forces s'exerçant sur la particule pendant sa chute à l'instant t.

1.3. En appliquant la deuxième loi de Newton, montrer que l'équation différentielle relative à la valeur v de la vitesse de la particule, se met sous la forme : $\frac{dv}{dt}+\frac{1}{\tau}.v = \frac{V_{lim}}{\tau}$ Exprimer τ et V_{lim}Que représente $V_{\lim}$, justifier et en calculer la valeur.

1.4. a- Résoudre l'équation différentielle établie à la question 1.3. Montrer que v(t) peut se mettre sous la forme :

$$v(t) = A.(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})\text{ ; donner l'expression de A.}$$

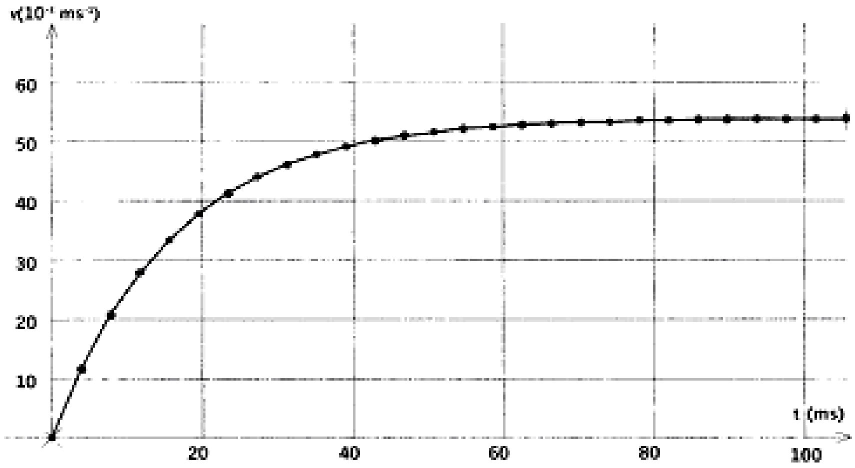
b- Exprimer la fonction dérivée de v ; Exprimer $\left(\frac{dv}{dt}\right)_{t=\tau}$. En déduire l'équation de la tangente à la courbe représentative de v(t) à t = 0. Quelle valeur prend cette équation pour t = τ ? En déduire une méthode graphique pour déterminer τ.

c- Déterminer la date t_1 à partir de laquelle la valeur de la vitesse vaudra 99% de la valeur de la vitesse limite.

1.5. Une étude expérimentale a permis d'obtenir le graphe, donné ci-contre, représentant les variations de la vitesse de la particule au cours du temps.

a) Déterminer par une méthode de votre choix le temps caractéristique τ_1 de l'évolution de la vitesse.

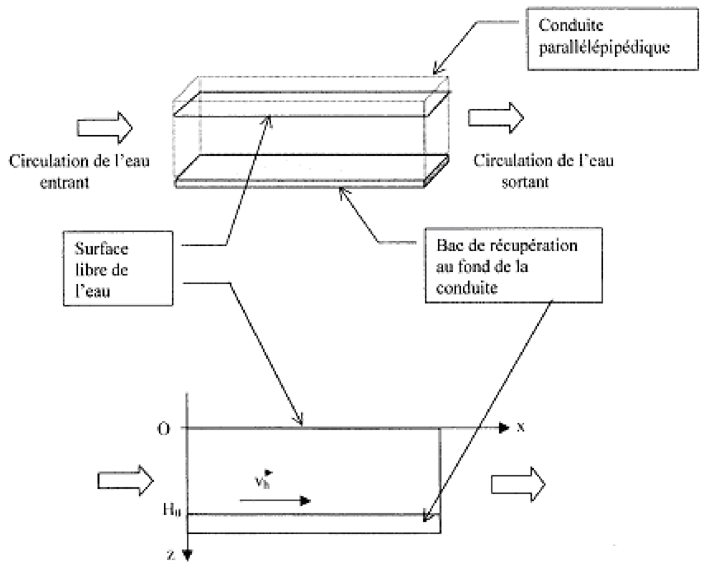
b) Décrire et nommer les phases du mouvement de la particule entre les instants t = 0 et t' = 100 ms.



2. Application : modélisation simple d'un bac à décantation à flux horizontal.

Le principe d'un bac à décantation à flux horizontal consiste à faire circuler, à vitesse constante $\vec{V}_h$, un courant d'eau contenant des particules de masses différentes dans un dispositif que l'on peut modéliser de la façon suivante :

En fonction des caractéristiques des particules, ces dernières vont tomber au fond du bac en des endroits différents. On peut donc, par ce procédé, séparer les particules de natures différentes contenues dans l'eau.



On s'intéresse au mouvement d'une particule (identique à celle de la partie 1) initialement à la surface de l'eau, à la côte z = 0 et pénétrant dans le bac en x = 0.

2.1. En imaginant que la particule reste à la surface de l'eau, quel temps τ_2 mettrait-elle pour parcourir la longueur du bac L = 1,0 m, si la vitesse de circulation d'eau est constante et de valeur v_h = 0,10 m.s^{-1} ?

2.2. En comparant les valeurs de τ_1 (déterminé à la question 1.6.a.) et τ_2, justifier que l'on puisse considérer que la vitesse de la particule dans la conduite est $\vec{V} = \vec{V}_h + \vec{V}_l$ (où v_l est la valeur de la vitesse limite atteinte en chute libre dans le fluide).

2.3. On déduit de l'étude précédente les grandeurs cinétiques données dans le tableau ci-dessous. Compléter la dernière ligne du tableau.

	Projection selon Ox	Projection selon Oz
Accélération	$a_x(t) = 0$	$a_z(t) = 0$
vitesse	$v_x(t) = v_h$	$v_z(t) = v_l$
Position	x(t) =	z (t) =

2.4. En déduire que la trajectoire z = f(x) est une droite de coefficient directeur : $\alpha = \dfrac{\rho_S - \rho_l}{\rho_S} \cdot \dfrac{m.g}{f.v_h}$

En réalité les particules ne sont pas toutes identiques et sont caractérisées par leur masse m.

2.5. Calculer la valeur de la masse m_C de la particule pour que cette dernière tombe dans le bac à récupération au point de coordonnées x = L et z = H_0 = 0,54 m.

2.6. Dans quelle zone vont tomber les particules de masses m et de même masse volumique ρ_S :

- si $m < m_C$?
- si $m > m_C$? Justifier votre réponse.

III- On jette un objet de masse m verticalement vers le haut avec une vitesse notée v_0 dans le champ de pesanteur g supposé uniforme, à partir d'une altitude initiale par rapport au sol notée h.

Comparer les altitudes atteintes h_{max}, dans les deux cas suivants ;

- on néglige toutes les forces autres que le poids ;
- on tient compte de la présence d'une force de frottements fluides de la forme : $\vec{f} = -\alpha.\vec{v}$.

A.N. : h = 0 ; m = 25 g ; α = 0,065 kg.s^{-1} ; v_0 = 15 m.s^{-1} ; g = 9,8 m.s^{-2}.