

PROGRAMMATION DYNAMIQUE : SOUS-ENSEMBLES INDÉPENDANTS

On considère des arbres binaires dont les sommets contiennent deux entiers strictement positifs : le premier est le numéro du sommet (il est unique), le second est le poids du sommet (il peut apparaître plusieurs fois).

On donne 4 fonctions simples : la première donne la liste des fils d'un arbre (fils vide compris), la seconde celle de ses petits-fils (petits-fils vides compris), la troisième donne le plus grand numéro des sommets dans un arbre et la dernière la somme des entiers d'une liste. Toutes ces définitions sont sur le site, avec un arbre exemple.

```
type arbre = V | S of int * int * arbre * arbre;;

let fils t =
  match t with
  | V -> []
  | S(_,_,fg,fd) -> [fg; fd];;

let petitsfils t =
  match t with
  | V | S(_,_,V,V) -> []
  | S(_,_,fg,fd) -> fils fg @ fils fd;;

let rec pgn t =
  match t with
  | V -> 0
  | S(n,_,V,V) -> n
  | S(n,_,fg,fd) -> let ng = pgn fg and nd = pgn fd in
    max (max ng nd) n;;

let rec sum l =
  match l with
  | [] -> 0
  | x :: q -> x + sum q;;
```

Deux sommets de l'arbre sont dits indépendants quand aucun des deux n'est le fils de l'autre. Un sous-ensemble de sommets est dit indépendant quand tout sommet de l'ensemble est indépendant des autres.

Enfin, le poids d'un ensemble de sommets est la somme des poids des sommets.

L'objectif est de construire un algorithme qui calcule le poids maximal d'un ensemble indépendant de sommets d'un arbre et qui donne en plus l'ensemble des sommets associé (un tel ensemble de sommets est représenté par la liste des numéros des sommets).

On se donne un arbre t . Soit u un sommet de l'arbre : on note $T(u)$ un ensemble indépendant de sommets du sous-arbre de racine u , de poids maximal. L'objectif est donc de calculer $T(t)$.

- 1) Montrez que si u est un sommet de fils v_1 et v_2 et si $u \notin T(u)$, alors $T(u) = T(v_1) \cup T(v_2)$.
- 2) Si maintenant $u \in T(u)$, donnez une expression de $T(u)$ en fonction des $T(w_1), \dots, T(w_k)$ où w_1, \dots, w_k sont les petits-fils de u .
- 3) Montrez que le problème de calcul de $T(t)$ peut se résoudre par programmation dynamique.
- 4) Donnez la forme générale d'un algorithme qui calcule le poids maximal d'un ensemble indépendant. Traduisez-le en code CAML.
- 5) Améliorez votre algorithme pour qu'il donne en plus l'ensemble des sommets associé.