

## GRAPHES : VOISINS, DEGRÉ

Définir une matrice en CAML se fait à l'aide de la fonction `make_matrix n p x`, l'accès à une case par `m.(i).(j)`.

On définit trois types pour représenter les graphes d'ordre  $n$  (dont les sommets sont numérotés par des entiers de 0 à  $n - 1$ ) :

- par matrice d'adjacence (MA) : **type** `ma == int vect vect`
- par tableau de listes d'adjacence (TLA) : **type** `tla == int list vect`
- par liste de listes d'adjacence (LLA) : **type** `lla == (int * int list) list`

### 1) Densité d'un graphe non orienté

On appelle densité d'un graphe non orienté le quotient  $\frac{2m}{n(n-1)}$  où  $n$  est l'ordre du graphe et  $m$  son nombre d'arêtes.

Écrivez une fonction qui calcule la densité d'un graphe selon le type choisi pour représenter un graphe.

### 2) Fonctions élémentaires : comparaison des représentations (vous préciserez la complexité selon le type représentant les graphes)

- Avec le type MA, écrivez les fonctions qui calculent les degrés sortant, entrant d'un sommet, les listes des successeurs ou des prédécesseurs d'un sommet dans un graphe orienté, la liste des voisins dans un graphe non orienté.
- Faites de même avec le type TLA.
- Écrivez une fonction qui détermine si deux sommets sont voisins dans un graphe (orienté ou non) : une fois avec le type MA, une fois avec le type TLA.

### 3) Changements de représentation

- Écrivez une fonction qui donne les listes d'adjacence (TLA) d'un graphe à partir de sa matrice d'adjacence (MA). Donnez sa complexité en fonction de  $n$ .
- Écrivez la fonction réciproque (TLA  $\rightarrow$  MA). Donnez sa complexité en fonction de  $n$ .
- Adaptez ces fonctions pour remplacer le type TLA par le type LLA.

### 4) Étudiez le coût de l'ajout/la suppression d'une arête, l'ajout/la suppression d'un sommet selon le type choisi.

### 5) Écrivez une fonction qui transforme un graphe orienté en un graphe non orienté selon le type choisi pour les graphes.

### 6) Graphe transposé

- Écrivez une fonction qui calcule les prédécesseurs d'un sommet dans un graphe orienté (type TLA). Estimez sa complexité en fonction de  $n$ .
- On appelle graphe transposé le graphe ayant les mêmes sommets mais dont toutes les arêtes ont été inversées. Écrivez une fonction qui calcule le graphe transposé (type TLA) d'un graphe orienté. Donnez sa complexité en fonction de  $n$ .
- Si on avait représenté le graphe par sa matrice d'adjacence, quelle est la matrice d'adjacence de son graphe transposé ?

### 7) Coloriage d'un graphe.

Soit  $G = (S, A)$  un graphe orienté (resp. non orienté) et  $k$  un entier naturel non nul. On appelle  $k$ -coloriage de  $G$  toute fonction de  $S$  dans  $\{1, \dots, k\}$  telle que pour tout  $(i, j) \in A$ ,  $f(i) \neq f(j)$  (resp pour tout  $\{i, j\} \in A$ ,  $f(i) \neq f(j)$ ).

- Écrivez une fonction de paramètres un graphe (type TLA) et une fonction de  $S$  dans  $\{1, \dots, k\}$  (représentée par un tableau), qui vérifie si la fonction est un  $k$ -coloriage du graphe.
- En général, quand on veut colorier un graphe, on cherche à minimiser le nombre de couleurs nécessaires. L'algorithme suivant donne souvent un résultat acceptable : on construit la séquence des sommets ordonnée par ordre décroissant ; on choisit une couleur pour le premier sommet nommé  $A$  ; on colorie de la même couleur tous les sommets non adjacents au sommet  $A$  et qui ne sont pas adjacents entre eux ; on réitère ce procédé avec une autre couleur pour le premier sommet non colorié de la liste ; on recommence jusqu'à épuisement des sommets. Écrivez une fonction de coloriage.