

ARBRES N -AIRES

Sauf indication contraire, les arbres sont homogènes de type :

type 'a arbre = S of 'a * 'a arbre list .

La taille d'un arbre est le nombre de ses sommets.

1)

- Écrivez une fonction qui calcule l'arité d'un arbre. Quelle est sa complexité en fonction de la taille n de l'arbre et de son arité a ?
- Écrivez une fonction qui compte le nombre de feuilles d'un arbre.
- Écrivez une fonction qui donne la liste des ancêtres d'un sommet, c'est-à-dire tous les sommets sur le chemin de la racine vers le sommet.

2) Il arrive parfois qu'un algorithme n'ait pas de réponse : par exemple, si on cherche le père d'un sommet dans un arbre et que ce sommet est la racine, il n'a pas de père. Mais CAML doit quand même donner une réponse à cause du typage des branches du **if ... then ... else ...**

CAML a en interne un type 'a option défini de la façon suivante : **type** 'a option = None | Some of 'a. En utilisant ce type, on peut simuler l'absence de réponse (en réalité, réponse **None**) ou réponse concrète (en réalité, réponse **Some(...)**).

- Écrivez une fonction **pere** x a de type 'a \rightarrow 'a arbre \rightarrow 'a arbre option, qui détermine le père du sommet d'étiquette x (on supposera que toutes les étiquettes sont distinctes).
- Écrivez une fonction **freres** x a de type 'a \rightarrow 'a arbre \rightarrow 'a arbre list, qui détermine les frères d'un sommet d'étiquette x .
- Écrivez une fonction **freres_suivants** x a de type 'a \rightarrow 'a arbre \rightarrow 'a arbre list, qui détermine les frères d'un sommet d'étiquette x qui le suivent dans l'ordre du parcours en largeur.
- Écrivez une fonction **descendants** x a , qui calcule la liste des sommets situés en-dessous du sommet d'étiquette x .

3) [Arbres binomiaux]

On définit récursivement les arbres binomiaux B_k (on ne donne que leur squelette) :

- B_0 est un arbre à un sommet et aucun fils ;
- si $n \geq 1$, alors B_n est un arbre qui a pour fils n arbres binomiaux de type B_{n-1}, \dots, B_0 .

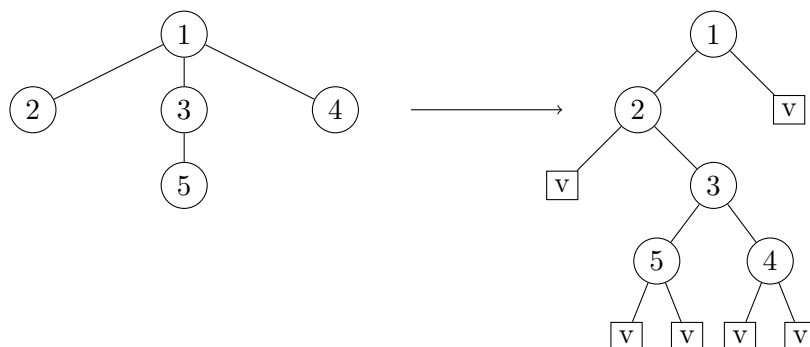
- Dessinez les squelettes des arbres binomiaux B_i pour $i \in \{0, \dots, 4\}$.
- Quelle est la hauteur d'un arbre binomial de type B_n ? Combien a-t-il de sommets ? De feuilles ?
- Déterminez combien de sommets de profondeur i possède un arbre binomial B_n .

4) [Transformation d'un arbre quelconque en arbre binaire]

On considère le type suivant : **type** 'a arbrebin = V | N of 'a * 'a arbrebin * 'a arbrebin .

On définit récursivement une application de l'ensemble des arbres quelconques dans celui des arbres binaires : tout sommet s de l'arbre quelconque est associé à un sommet b de l'arbre binaire tel que le fils gauche de b soit l'arbre associé au premier fils de s et le fils droit de b est l'arbre associé au frère suivant de b .

Exemple :



Écrivez la fonction de conversion : vous pourrez vous inspirer des parcours vus en cours ou de l'autre représentation des arbres n -aires.