Corrigé TD8 : Réduction (2)

Exercice 70 *(Réduction effective)*
Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 \\ -6 & -10 & -16 \\ 4 & 7 & 11 \end{pmatrix}$.
a) Déterminer le polynôme caractéristique de A.
b) En déduire le spectre (réel) de A.
c) Préciser les dimensions des espaces propres de A.
d) A est-elle diagonalisable?
e) Caractériser les sous espaces propres en en donnant une base.
f) Pouvez-vous exhiber une matrice $P \in GL_3(\mathbb{R})$ *telle que* $A = Pdiag(0,1,3)P^{-1}$ *?*
On pourra pour clarifier son point de vue passer par f_A *et effectuer un changement de base.*

Exercice 71 *(Réduction effective)*
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & -3 \\ -1 & 6 & -4 \end{pmatrix}$.
a) Déterminer le polynôme caractéristique de A.
b) En déduire le spectre (réel) de A.
c) Préciser les dimensions des espaces propres de A.
d) A est-elle diagonalisable?
e) Caractériser les sous espaces propres en en donnant une base.
En utilisant f_A *et un changement de base à analyser et à matérialiser, établir l'existence (on la donnera) de* $P \in GL_3(\mathbb{R})$ *telle que* $A = PTP^{-1}$, *où* $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Soient x, y, z *des applications dérivables sur* $\mathbb{R}$ *et à valeurs dans ce même ensemble. On dit alors que* $X : t \in \mathbb{R} \to \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et sa dérivée, notée* X', *est l'application* $t \in \mathbb{R} \to \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$.
On garde ces notations.
f) Soit $M \in M_3(\mathbb{R})$ *et on suppose* X *dérivable sur* $\mathbb{R}$. *On définit* $Y = MX$.
Prouver que Y *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et que* $Y' = MX'$.
On considére l'équation différentielle matricielle (1) : $X' = AX$, *où* X *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et à valeurs dans* $M_{3,1}(\mathbb{R})$.
g) Etablir l'équivalence entre (1) et (2) : $Y' = TY$, *où* $Y = P^{-1}X$.
h) Ecrire (2) sous forme de système (on posera $Y : t \in \mathbb{R} \to \begin{pmatrix} \to \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} \end{pmatrix}$ *et déterminer* u, v *et* w *puis résoudre (1).*

Solution :
f) On pose $M = (m_{ij})$ et $Y : t \in \mathbb{R} \to \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$.
Par exemple $u = m_{11}x + m_{12}y + m_{13}z$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme combinaison linéaire de telles fonctions) et $u' = m_{11}x' + m_{12}y' + m_{13}z'$. Même topo pour les autres composantes donc Y est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $Y' = MX' \square$
g) Partant de $X' = AX$ en mulipliant chaque membre de cette équation matricielle par P^{-1} (à gauche),

nous obtenons $P^{-1}X' = TY$ soit, avec f), on récupère (2). Partant de (2) et multipliant chacun de ses membres (à gauche) par P, nous trouvons bien (1). Ce qui établit l'équivalence désirée□

h) La traduction demandée est $\left\{\begin{array}{rcl} u' &=& u+v \\ v' &=& v \\ w' &=& -w \end{array}\right.$.

La solution se fait par remontée et on obtient (2) équivalent à l'existence de $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$: $\left\{\begin{array}{rcl} u'-u &=& Be^t \\ v(t) &=& Be^t \\ w(t) &=& Ae^{-t} \end{array}\right.$.

Finalement les solutions de (2) sont les $Y : t \in \mathbb{R} \to \begin{pmatrix} Ce^t + Bte^t \\ Be^t \\ Ae^{-t} \end{pmatrix}$, où $(A,B,C) \in \mathbb{R}^3$.

Les solutions de (1) sont donc les PY, où Y est présenté ci-dessus, comme vous disposez de la matrice P...■

Exercice 72 *Soient $a \in \mathbb{R}$ et $M_a = \begin{pmatrix} 1 & a-2 & 2-a \\ 1-a & 2a-1 & 1-a \\ 1-a & a & 0 \end{pmatrix}$.*
Vérifier que ces matrices sont simultanément diagonalisables.

Solution :
Il s'agit de montrer qu'il existe $P \in GL_3(R)$ (indépendante de a) telle que : $\forall a \in \mathbb{R}$, $P^{-1}M_aP$ soit diagonale.
On pourra observer (merci qui?) que cette matrice est pseudo-stochastique de constante 1 donc $1 \in Sp(M_a)$.
En tenant compte de cette remarque et par un calcul fait maintes fois, on trouve :
$\chi_A = (X-1)(X-a)(X-a+1)$ et ainsi $Sp(M_a) = \{1, a, a-1\}$.
NB : la trace de M_a valide ce passage numérique.
Si $a \neq 1$ et $a \neq 2$, on dispose de 3 vp pour une matrice de taille 3, A est donc dz.
Pour le cas $a = 1$, on observe que le rang de $A - I_3$ vaut 1 et ainsi A est encore dz; on procède de même pour $a = 2$.
Une recherche des espaces propres conduit à proposer $D_a = diag(1, a, a-1)$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$■

Exercice 73 *(Matrices compagnons ou de Froebenius)*
Ici $n \geq 2$ et $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.
On pose : $C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & -a_1 \\ & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ & (0) & \ddots & 0 & \vdots \\ & & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$, matrice compagnon de P.
a) Déterminer suivant a_0 le rang de C_P.
b) En examinant le rang de $\lambda I_n - C_P$ et sans chercher à déterminer valeur ou vecteur propre, prouver que tout sous-espace propre de C_P est de dimension 1.
c) En le calculant, prouver que P est le polynôme caractéristique de C_P (Un peu technique).
d) Déterminer une CNS sur P pour que C_P soit diagonalisable.

Solution :
a) Les $n-1$ premières colonnes de C_P sont indépendantes.
Si $a_0 = 0$, la dernière colonne est combinaison linéaire des autres donc le rang de C_P vaut $n-1$ sinon ce rang vaut n ■
b) De façon évidente les $n-1$ premières colonnes de $\lambda I_n - C_P$ sont linéairement indépendantes donc le rang de cette matrice vaut au moins $n-1$.
Si on suppose que $\lambda \in Sp(C_P)$ alors la matrice $\lambda I_n - C_P$ n'étant pas inversible, son rang est inférieur à $n-1$. Il en résulte que ce rang vaut $n-1$ et donc (formule du rang) que $\dim(Ker(A - \lambda I_n) = 1$■
c) On se propose de calculer le polynôme caractéristique de C_P.

Le plus simple (puisqu'on connaît le résultat à déterminer) est de procéder par récurrence sur le degré de P; je vous laisse l'initialisation ($n = 1$) sur les bras.
On suppose la formule établie au rang $n-1$ et on développe $\chi(C_P)$ suivant la première ligne, ce qui donne : $\chi(C_P) = \lambda\chi(C_Q) + (-1)^{n+1}a_0 \times (-1)^{n-1}$ (ce dernier terme provient de l'évaluation d'un déterminant triangulaire d'ordre $n-1$ ne comportant que des -1 sur sa diagonale), où on a posé $Q = X^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} a_{k+1}X^k$.
Grâce à l'hypothèse de récurrence, il vient $\chi(C_P) = \lambda Q(\lambda) + a_0 = P(\lambda)$ et la récurrence se poursuit.
d) En combinant b) et la caractérisation algébrique de diagonalisabilité, on peut énoncer que C_P est dz ssi P est scindé à racines simples■