

## Devoir à la maison n° 1

### Exercice 1.

- Déterminer si chacune des assertions suivantes est vraie ou fausse (en le démontrant). On énoncera la négation des assertions fausses.
  - $\forall n \in \mathbb{N}, n^3 - n$  est pair,
  - $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, n + m$  est pair,
  - $\exists m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n + m$  est pair.
- On considère l'assertion :

$$(E) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, x + y > 2 \Rightarrow x > 1 \text{ ou } y > 1.$$

- Écrire la contraposée de l'assertion  $(E)$ .
- Démontrer l'assertion  $(E)$ .
- Écrire la réciproque de l'assertion  $(E)$ . Cette réciproque est-elle vraie ou fausse ?

### Exercice 2. On souhaite montrer l'inégalité :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \sqrt{2\sqrt{3\sqrt{\dots\sqrt{N}}}} < 3.$$

On va pour cela procéder par *récurrence descendante* :

Soit  $N \in \mathbb{N}$ . On note, pour tout  $n \in \llbracket 2, N \rrbracket$ ,  $P(n)$  l'assertion :

$$\sqrt{n\sqrt{(n+1)\sqrt{\dots\sqrt{N}}}} < n+1.$$

- Montrer  $P(N)$ , en raisonnant par équivalence.
- Montrer que :  $\forall n \in \llbracket 3, N \rrbracket, P(n) \Rightarrow P(n-1)$ .
- Conclure.