

CorTD-Tr2 : Mathématiques pour la Physique-Chimie**Exercice 1 : Équations différentielles linéaires du 1^{er} ordre (★)**

Déterminer la ou les solution(s) réelle(s) des équations différentielles suivantes.

a. $y' = 5y$

Cette équation différentielle homogène s'écrit $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$ avec $a(x) = 1$ et $b(x) = -5$.

Les solutions réelles sont donc de la forme

$$y(x) = \lambda e^{A(x)}$$

où λ est réel et A une primitive de la fonction $x \rightarrow -\frac{b}{a} = 5$, soit, par exemple, $A: x \rightarrow 5x$.

Conclusion :

$$y(x) = \lambda e^{5x} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

b. $2f' + 3f = 6$

Les solutions de l'équation homogène s'écrivent

$$f_h(x) = \lambda e^{-3x/2} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

Une solution particulière est

$$f_p(x) = 2$$

Conclusion : les solutions sont de la forme

$$f(x) = 2 + \lambda e^{-3x/2} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

c. $\sqrt{1-x^2}y' + y = 0$ sur l'intervalle $I =]-1,1[$ sachant que $y(0) = 5$

Une primitive de la fonction $x \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur I est par exemple $A: x \rightarrow \arcsin(x)$

Les solutions s'écrivent donc

$$y(x) = \lambda e^{\arcsin(x)} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

On cherche la solution telle que $y(0) = 5$ (problème de Cauchy). Or $y(0) = \lambda e^{\arcsin(0)} = \lambda e^{0} = \lambda$ donc $\lambda = 5$.

Conclusion : la solution cherchée est

$$y(x) = 5e^{\arcsin(x)}$$

d. $x^2y'(x) + y(x) = x^2 + x$ sur $I =]0, +\infty[$

Une primitive de la fonction $x \rightarrow -\frac{1}{x^2}$ est $A: x \rightarrow \frac{1}{x}$ donc les solutions de l'équation homogène sont

$$y_h(x) = \lambda e^{1/x} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

Une solution particulière évidente est

$$y_p(x) = x$$

Conclusion : les solutions sont

$$y(x) = x + \lambda e^{1/x} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

e. $\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = \frac{E}{\tau}$ sur $I = [0, +\infty[$ sachant que $u(0) = 0$ et que E et τ sont des constantes réelles

Les solutions de l'équation homogène sont $u(t) = \lambda e^{-t/\tau}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

Une solution particulière évidente est $u(t) = E$

Les solutions sont donc $u(t) = E + \lambda e^{-t/\tau}$

On cherche la solution telle que $u(0) = 0$ d'où $\lambda = -E$.

Conclusion :

$$u(t) = E(1 - e^{-t/\tau})$$

f. $\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = \frac{E \cos(\omega t)}{\tau}$ sur $I = [0, +\infty[$ sachant que $u(0) = 0$ et que E, τ et ω sont des constantes réelles.

Les solutions sont de la forme :

$$u = u_p + u_h$$

où u_p est une solution particulière et u_h les solutions de l'équation homogène.

Les solutions u_h ont été établies à la question précédente :

$$u_h(t) = \lambda e^{-t/\tau} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

On cherche une solution particulière sous la forme d'une sinusoïde de même pulsation que le membre de droite :

$$u_p(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

où $A > 0$ est l'amplitude de u_p et ϕ est la phase à l'origine.

Pour trouver A et ϕ il y a trois méthodes :

- trigonométrique : on injecte la solution dans l'équation et on fait des calculs de trigonométrie ;
- vectorielle : on utilise la méthode des vecteurs de Fresnel ;
- algébrique : on utilise la méthode des complexes pour transformer l'équation différentielle en une équation algébrique ; c'est celle que nous mettons en œuvre ci-dessous.

Posons $\underline{u_p}(t) = A e^{j(\omega t + \phi)}$, alors $u_p(t) = \operatorname{Re}(\underline{u_p}(t))$ d'où :

$$\frac{d\operatorname{Re}(\underline{u_p}(t))}{dt} + \frac{\operatorname{Re}(\underline{u_p}(t))}{\tau} = \frac{\operatorname{Re}(E e^{j\omega t})}{\tau}$$

Les coefficients sont constants et réels donc :

$$\operatorname{Re} \left[\frac{d\underline{u_p}(t)}{dt} + \frac{\underline{u_p}(t)}{\tau} \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{E e^{j\omega t}}{\tau} \right]$$

Cette égalité est aussi vraie si l'on prend la partie imaginaire au lieu de la partie réelle (y-réfléchir) donc

$$\frac{d\underline{u_p}(t)}{dt} + \frac{\underline{u_p}(t)}{\tau} = \frac{E e^{j\omega t}}{\tau}$$

L'intérêt de la méthode réside dans la propriété suivante qui permet de transformer l'équation différentielle précédente en une équation algébrique :

$$\frac{d\underline{u_p}(t)}{dt} = j\omega \underline{u_p}(t)$$

On en déduit en effet que

$$\left(j\omega + \frac{1}{\tau} \right) \underline{u_p}(t) = \frac{E e^{j\omega t}}{\tau} \text{ soit } \underline{u_p}(t) = \frac{E e^{j\omega t}}{1 + j\omega\tau}$$

$$\text{Or } \underline{u_p}(t) = A e^{j(\omega t + \phi)} \text{ d'où } A = |\underline{u_p}(t)| = \frac{E}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \text{ et } \phi = \arg\left(\frac{E}{1 + j\omega\tau}\right) = -\arctan(\omega\tau)$$

Ainsi

$$u_p(t) = A \cos(\omega t + \phi) = \frac{E}{1 + \omega^2\tau^2} [\cos(\omega t) + \omega\tau \sin(\omega t)]$$

La dernière égalité se démontre en utilisant l'identité trigonométrique $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

La solution générale est donc

$$u(t) = \lambda e^{-t/\tau} + \frac{E}{1 + \omega^2\tau^2} [\cos(\omega t) + \omega\tau \sin(\omega t)]$$

Or $u(0) = 0$ donc $0 = \lambda + \frac{E}{1+\omega^2\tau^2}$ et par suite la solution au problème s'écrit :

$$u(t) = \frac{E}{1 + \omega^2\tau^2} [\cos(\omega t) + \omega\tau \sin(\omega t) - e^{-t/\tau}]$$

Exercice 2 : Principe de superposition (★)

On considère l'équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre

$$(E) : a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c_1(x) + c_2(x)$$

où a, b, c_1 et c_2 sont des fonctions continues de l'intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$.

On note $(E_1), (E_2), (E_h)$ les équations différentielles obtenues à partir de (E) lorsque respectivement $c_2 = 0, c_1 = 0$, et $c_1 = c_2 = 0$.

1. Montrer que si y_1 et y_2 sont solutions de (E_h) alors, $\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est aussi solution de (E_h) .

L'équation homogène s'écrit :

$$(E_h) : a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$$

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$ et y_1 et y_2 deux solutions de (E_h) , alors, en utilisant la linéarité de la dérivée : $[\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2]' = \lambda_1 y_1' + \lambda_2 y_2'$, on obtient

$$\begin{aligned} a(x)[\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x)]' + b(x)[\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x)] &= \lambda_1 \underbrace{[a(x)y_1'(x) + b(x)y_1(x)]}_{=0 \text{ car } y_1 \text{ est solution de } (E_h)} + \lambda_2 \underbrace{[a(x)y_2'(x) + b(x)y_2(x)]}_{=0 \text{ car } y_2 \text{ est solution de } (E_h)} \\ a(x)[\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x)]' + b(x)[\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x)] &= 0 \end{aligned}$$

La combinaison linéaire $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est donc aussi solution de (E_h) .

2. Montrer que si y_1 est solution de (E_1) et y_2 est solution de (E_2) alors $y_1 + y_2$ est solution de (E) .

Les équations (E_1) et (E_2) s'écrivent :

$$(E_1) : a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c_1(x) \quad \text{et} \quad (E_2) : a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c_2(x)$$

Soient y_1 et y_2 deux solutions respectivement de (E_1) et (E_2) , alors :

$$\begin{aligned} a(x)[y_1(x) + y_2(x)]' + b(x)[y_1(x) + y_2(x)] &= \underbrace{[a(x)y_1'(x) + b(x)y_1(x)]}_{=c_1(x) \text{ car } y_1 \text{ est solution de } (E_1)} + \underbrace{[a(x)y_2'(x) + b(x)y_2(x)]}_{=c_2(x) \text{ car } y_2 \text{ est solution de } (E_2)} \\ a(x)[y_1(x) + y_2(x)]' + b(x)[y_1(x) + y_2(x)] &= c_1(x) + c_2(x) \end{aligned}$$

La somme $y_1 + y_2$ est donc solution de (E) .

Exercice 3 : Équations différentielles linéaires à coefficients constants du 2^{ème} ordre (★★)

Déterminer les solutions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, puis les solutions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ des équations différentielles suivantes :

a. $2y'' - 3y' - 2y = 0$

L'équation caractéristique est

$$2r^2 - 3r - 2 = 0$$

de discriminant $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 25 > 0$ et de racines $r_1 = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}$ et $r_2 = \frac{3+5}{4} = 2$.

Les solutions dans $\mathbb{C}$ de cette équation homogène s'écrivent donc

$$y(x) = \lambda_1 e^{-x/2} + \lambda_2 e^{2x} \quad \text{où } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$$

Les solutions dans $\mathbb{R}$ ont la même forme avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$

b. $y'' - 4y' + 13y = 0$

L'équation caractéristique est $r^2 - 4r + 13 = 0$ de discriminant $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 13 = -36 < 0$ et de racines $r_1 = \frac{4+6i}{2} = 2 + 3i$ et $r_2 = \frac{4-6i}{2} = 2 - 3i$.

Les solutions dans $\mathbb{C}$ de cette équation homogène s'écrivent donc

$$y(x) = \lambda_1 e^{(2+3i)x} + \lambda_2 e^{(2-3i)x} \quad \text{où } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$$

Les solutions dans $\mathbb{R}$ s'écrivent

$$y(x) = (\lambda_1 \cos(3x) + \lambda_2 \sin(3x))e^{2x} \quad \text{où } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

c. $4y'' + 12y' + 9y = 0$

L'équation caractéristique est $4r^2 + 12r + 9 = 0$ de discriminant $\Delta = 12^2 - 4 \times 4 \times 9 = 0$ et de racine (double) $r_0 = \frac{-12}{8} = -\frac{3}{2}$. Les solutions dans $\mathbb{C}$ de cette équation homogène s'écrivent donc

$$y(x) = (\lambda_1 + \lambda_2 x)e^{-3x/2} \quad \text{où } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$$

Les solutions dans $\mathbb{R}$ ont la même forme avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

d. $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = xe^{-x}$ (on cherchera une solution particulière sous la forme $x \rightarrow (ax + b)e^{-x}$)

▪ On cherche *une* solution particulière sous la forme $y_p(x) = (ax + b)e^{-x}$ d'où

$$y_p'(x) = (a - (ax + b))e^{-x} = (-ax + a - b)e^{-x} \quad \text{et} \quad y_p''(x) = (ax - 2a + b)e^{-x}$$

On en déduit

$$(ax - 2a + b)e^{-x} - 4(-ax + a - b)e^{-x} + 4(ax + b)e^{-x} = xe^{-x}$$

$$(9ax - 6a + 9b)e^{-x} = xe^{-x} \quad \text{d'où} \quad a = \frac{1}{9} \quad \text{et} \quad b = \frac{2}{27}$$

▪ On cherche ensuite les solutions de l'équation homogène. L'équation caractéristique est

$$r^2 - 4r + 4 = 0$$

de discriminant $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 0$ et de racine (double) $r_0 = 2$.

Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation homogène s'écrivent donc

$$y_h(x) = (\lambda_1 + \lambda_2 x)e^{2x} \quad \text{où } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

▪ Les solutions s'écrivent :

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = \frac{x + \frac{2}{3}}{9}e^{-x} + (\lambda_1 + \lambda_2 x)e^{2x} \quad \text{où } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

Exercice 4 : Principe de superposition (★)

On considère l'équation différentielle linéaire à coefficients constants du 2^{ème} ordre

$$(E) : ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d_1(x) + d_2(x)$$

où a, b , et c sont des constantes ($a \neq 0$) de l'intervalle I de $\mathbb{R}$, et d_1 et d_2 des fonctions continues de I dans $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$.

On note (E_1) , (E_2) , (E_h) les équations différentielles obtenues à partir de (E) lorsque respectivement $d_2 = 0$, $d_1 = 0$, et $d_1 = d_2 = 0$.

1. Les résultats de l'exercice 2 restent-ils vrais ?

Les résultats restent vrais (ils sont la conséquence de la linéarité de la dérivée).

2. Peut-on les généraliser à d'autres types d'équations différentielles ?

Ils sont vrais pour n'importe quelle équation linéaire d'ordre n :

$$(E) : a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = d_1(x) + d_2(x)$$