

TD TR1 : Dimensions, unités, homogénéité

Exercice 1 : Chiffres significatifs (★)

Définition

Les chiffres significatifs d'un résultat de mesure sont les chiffres connus avec certitude plus le premier chiffre incertain. Exemple : la taille mesurée d'un élève est 1,62 m. 1 et 6 sont sûrs et 2 est le premier chiffre incertain donc les chiffres significatifs sont 1, 6 et 2.

Remarque : cette définition suppose que l'incertitude sur la mesure est de l'ordre de l'unité du dernier chiffre. Dans l'exemple précédent la taille de l'élève est donc $1,62 \pm 0,01\text{m}$. Nous verrons au chapitre TR3 sur les incertitudes de mesure que ce n'est pas toujours vrai.

Écriture scientifique

Un nombre décimal peut se mettre sous la forme scientifique $a \cdot 10^n$ où $1 \leq a < 10$ et n un entier.

Remarque : la notation scientifique est pratique si le nombre de chiffres est important et est utile pour faire apparaître les chiffres significatifs. Dans l'exemple précédent, si l'on veut exprimer la taille de l'élève en mm, il est préférable d'écrire $1,62 \cdot 10^3$ mm plutôt que 1620 mm car cette dernière écriture suggère une précision du mm.

Dans la suite on ne précise pas les unités éventuelles.

1. Souligner les chiffres significatifs des résultats suivants : 1000 0,0052 21,5605 00897,010 2000,001
1,910.10²
2. Exprimer les nombres en notation scientifique : 0,00728 69,45 324,5.10⁴ 0,0846.10⁶ 0,0054
3. Exprimer le résultat en notation scientifique avec un nombre de chiffres significatifs raisonnable :

$$\frac{26,42 \times 2,1 \times 0,684}{3,14} \quad \frac{324,5 \cdot 10^4}{6,2 \cdot 10^2} \quad 21,42 - 0,0007 \quad 8,456 \cdot 10^4 - 6,423 \cdot 10^2$$

Exercice 2 : Conversions (★)

Grandeur à convertir	Résultat
4200 m ² =	_____ km ²
1245 dam ² =	_____ km ²
4 km ² 6 hm ² =	_____ m ²
12 m ³ =	_____ L
0,45 cm ³ =	_____ mm ³
0,845 kg · m ⁻³ =	_____ g · cm ⁻³

Exercice 3 : Sur la nécessité de savoir faire des conversions (★★)

Lire le document ci-dessous et identifier l'erreur commise par l'équipe au sol. Quelle était la bonne quantité de kérosène à ajouter avant le décollage ?

Le vol 143 d'Air Canada



Le 23 juillet 1983, l'avion effectuant le vol 143 d'Air Canada a nécessité 22 300 kg de kérosène pour faire le trajet entre Montréal et Edmonton. La masse volumique du kérosène est de $0,803 \text{ g} \cdot \text{mL}^{-1}$ soit $1,77 \text{ lb} \cdot \text{L}^{-1}$ (la livre de symbole lb est une unité de masse utilisée par les anglo-saxons). L'avion disposait de 7682 L de combustible à son départ de Montréal. En multipliant cette quantité par 1,77, l'équipe au sol a calculé que la masse de kérosène correspondait à 13 597 kg et qu'elle devait ajouter 8 703 kg de carburant pour que l'avion se rende jusqu'à Edmonton. En divisant 8 703 kg par le facteur 1,77 elle en est venue à la conclusion qu'elle devait ajouter 4916 L de kérosène. En fait, elle en a ajouté 5000 L. L'avion a manqué de carburant en vol et a atterri en catastrophe près de Winnipeg alors qu'il lui restait encore des centaines de kilomètres à parcourir. Heureusement personne n'est mort, seules quelques personnes ont été blessées.

Exercice 4 : Le slug (★★)

Convertir un slug en kilogramme.

La NASA va enfin adopter le système métrique

La NASA a finalement accepté de lancer ses futures missions lunaires en utilisant le système métrique décimal. Les propres scientifiques de l'Agence ont enfin eu gain de cause alors qu'ils en faisaient la demande depuis qu'une erreur de calcul due à une confusion entre miles et kilomètres avait provoqué l'échec de la mission d'une sonde martienne. L'espace est devenu un business international et la NASA indique que seuls les Etats-Unis, la Birmanie et le Libéria utilisent toujours les miles pour mesurer les distances. L'agence spatiale, après des entretiens avec ses homologues de 15 autres nations, a annoncé la semaine dernière que le futur projet lunaire serait réalisé en utilisant uniquement le système métrique (et les unités SI). En 1999, la sonde Mars Climat orbiter avait atteint Mars, mais était entrée sur une orbite beaucoup trop basse et s'était écrasée dès son premier passage au-dessus de la face cachée de la planète. La NASA avait plus tard révélé que ses ingénieurs s'étaient embrouillés lors de la simple conversion d'unités métriques en unités impériales (américaines !) d'une information orbitale. La NASA a commencé à utiliser les mesures métriques pour quelques missions dès 1990, mais pour la plus grande partie d'entre elles, les navettes spatiales ou l'ISS par exemple, les miles, livres et gallons sont toujours de mise. « Mon unité impériale favorite est le slug ironise Ben Quine, professeur d'ingénierie spatiale de l'université d'York. Le slug est défini comme étant la masse qui, soumise à une force d'une livre (= 453,6 g), reçoit une accélération d'un pied (= 30,5 cm) par seconde par seconde ». Selon lui, le changement ne sera pas facile pour les américains. "Mais tout le monde doit faire attention avec les unités lors des conversions." Cependant il pense qu'à la longue, les calculs seront facilités. « Le pied est défini d'après la taille du pied d'un des rois d'Angleterre. Je ne me souviens pas lequel. Ce n'est vraiment pas une bonne façon d'envoyer des gens dans l'espace que de se baser sur la taille du pied d'un roi mort ».

Article rédigé par Didier Müller, publié le 24 janvier 2007 sur techno-science.net

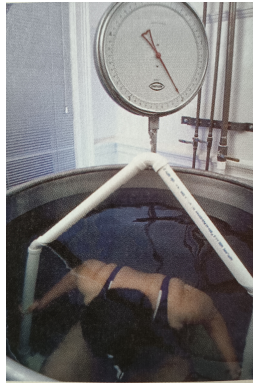
Exercice 5 : Qui est l'athlète ? (★★★)

Marie a une masse volumique de $1,060 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$. Paul a une masse de $165 \text{ lb} = 74,84 \text{ kg}$ dans l'air et de 14 lb dans l'eau ($\rho_{\text{eau}} = 0,998 \text{ g} \cdot \text{mL}^{-1}$).

Qui de Marie ou Paul est vraisemblablement un ou une athlète bien entraîné(e) ?

Mesurer son pourcentage de graisse

Il est facile de mesurer la masse d'une personne, mais comment fait-on pour connaître son volume ? Un corps immergé dans l'eau déplace son propre volume d'eau. La différence entre la masse d'une personne dans l'air et sa masse mesurée dans l'eau (voir photo) est égale à la masse du volume d'eau déplacé. En divisant cette dernière masse par la masse volumique de l'eau, on obtient le volume d'eau déplacé. En effectuant la correction pour tenir compte du volume d'air dans les poumons et les intestins (environ 3 L), on obtient le volume de la personne. Une fois connue la masse et le volume de la personne on calcule sa masse volumique, puis à l'aide d'un tableau (ci-contre) on détermine son pourcentage de graisse. Le pourcentage moyen de graisse est approximativement de 16 chez un homme et de 25 chez une femme.



Masse volumique du corps ($\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$)	Pourcentage de graisse du corps
1,010	38,3
1,030	29,5
1,050	21,0
1,070	12,9
1,090	5,07

Exercice 6 : Dimension d'une énergie (★)

Exprimer la dimension d'une énergie en fonction des dimensions de base.

Exercice 7 : Unité de la constante diélectrique du vide (★)

Deux charges ponctuelles q et q' placées à une distance r dans le vide exercent l'une sur l'autre la force de Coulomb de norme :

$$F = \frac{|qq'|}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Trouver l'unité exprimée avec les unités SI de base pour la constante diélectrique du vide ϵ_0 .

Remarque : l'unité SI de ϵ_0 est le farad par mètre ($\text{F} \cdot \text{m}^{-1}$) et $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \times 10^9} \text{F} \cdot \text{m}^{-1}$.

Exercice 8 : Homogénéité d'une relation (★)

- La relation $a = kt/v^2$ où a est une accélération, k une grandeur sans dimension, t un temps et v une vitesse, est-elle homogène ?
- La vitesse de propagation d'une onde se propageant le long d'une corde tendue a pour expression $v = \sqrt{T/\mu}$ avec μ la masse linéique et T la tension de la corde. Montrer que cette relation est homogène.

Exercice 9 : Périodes temporelles (★★)

- On observe que la période T d'un pendule simple placé dans le vide dépend uniquement de la longueur l du fil et de g , l'intensité de la pesanteur. Proposer une relation de la forme $T = kl^a g^b$ avec k , a et b des nombres sans dimension.
- Une bouée maritime de hauteur h , de masse m oscille dans l'eau de masse volumique ρ . Proposer une relation dimensionnellement correcte pour la période d'oscillations T .

Exercice 10 : Équations différentielles (★★)

- La concentration molaire du dioxygène, notée $[\text{O}_2]$, évolue au cours du temps lors d'une réaction chimique en suivant l'équation différentielle $\frac{d[\text{O}_2]}{dt} = -k[\text{O}_2]$. Déterminer la dimension et l'unité SI de la constante k .
- Donner les dimensions de ω_0 et Q dans l'équation différentielle :

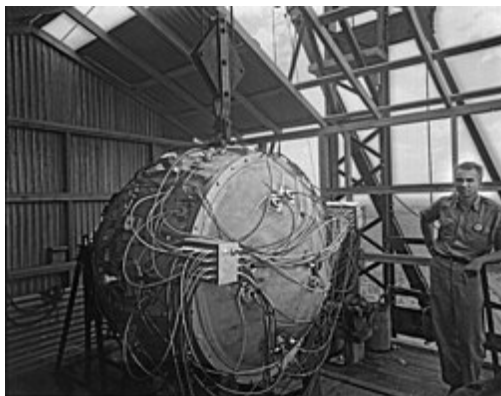
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

Exercice 11 : L'énergie de Trinity (★★★)

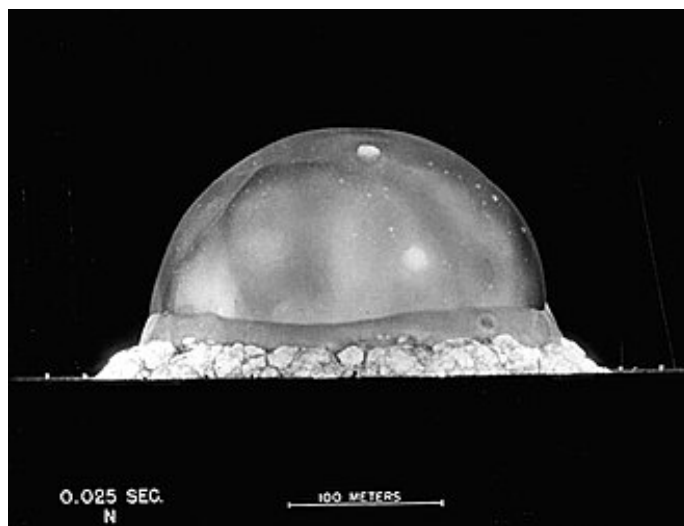
Estimer l'énergie de Trinity.

Le premier essai nucléaire

Trinity est le nom de code du premier essai nucléaire de l'histoire. L'explosion eut lieu le 16 juillet 1945 à Alamogordo au Nouveau-Mexique dans une zone désertique nommée Jornada del Muerto (« Étape du Mort » ou « Parcours de l'Homme mort »). Finalisation du projet Manhattan lancé par les États-Unis durant la Seconde Guerre mondiale, Trinity consistait en l'explosion d'une bombe au plutonium nommée « Gadget ». Semblable à une grosse boule, elle ne fut pas larguée d'un avion mais hissée au sommet d'une tour métallique. L'essai devait servir à valider des recherches menées sur l'arme atomique. À la suite de la réussite du programme, deux bombes seront larguées sur le Japon quelques semaines plus tard. Certaines données sur Trinity, comme la masse de plutonium embarquée, sont encore confidentielles. Quelques années après la fin de la guerre – peut-être pour impressionner leur opinion publique - les militaires américains décident de déclassifier les photos du test Trinity, qui se retrouvent donc publiées dans la presse. Mais secret-défense oblige, ils choisissent de ne rien révéler de la puissance de la bombe. Tout cela est sans compter sur un physicien britannique, Geoffrey Taylor, qui publie un article démontrant que les photos suffisent pour estimer l'énergie libérée par la bombe . . . et pour cela il suffit de faire une analyse dimensionnelle ! Geoffrey Taylor savait que le rayon R de la bulle de gaz chaud augmente avec le temps t écoulé depuis l'explosion (logique) et la quantité d'énergie E libérée par la bombe (logique), et qu'il diminue avec la masse volumique ρ de l'air environnant (logique : l'air environnant s'oppose à l'expansion de la bulle).



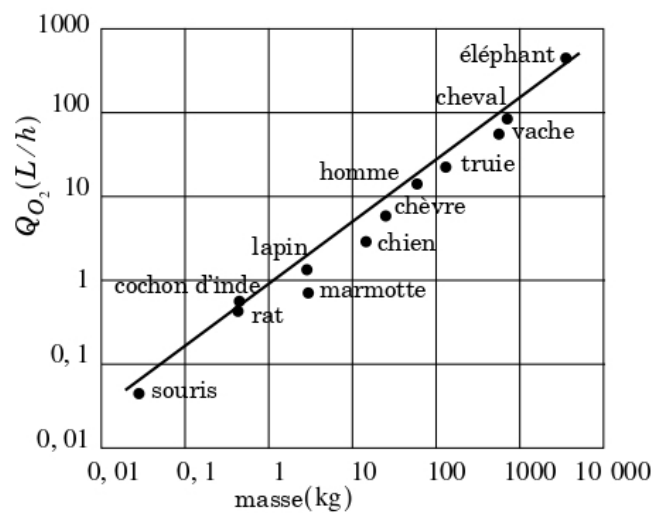
Bombe "Gadget"



Bulle de gaz 0,025 s après le début de l'explosion

Exercice 12 : De la souris à l'éléphant (★★★)

On dit qu'une fonction $y(x)$ vérifie une loi d'échelle d'exposant α si y est proportionnel à x^α . De nombreux paramètres physiologiques concernant les espèces animales d'un même groupe zoologique obéissent à de telles lois. Ainsi, les mammifères terrestres ayant une température corporelle proche de 37°C vérifient assez bien la relation $Q_{\text{O}_2} = 0,68 M_c^{3/4}$ où M_c désigne la masse corporelle en kilogramme et Q_{O_2} la consommation en dioxygène en litre par heure au repos, dans des conditions expérimentales précises non détaillées dans ce problème. Cette loi, découverte dès 1932 par M. Kleiber, peut être mise en rapport avec la puissance thermique dégagée par le métabolisme de l'animal. La représentation graphique de cette loi est indiquée ci-dessous.



Q_{O_2} en fonction de M_c en échelle logarithmique

1. Les morphologies des animaux d'un même groupe étant voisines, le volume de dioxygène transporté par le sang à chaque battement de cœur, est à peu près proportionnel à la masse corporelle M_c .

Sachant que pour un homme de 70 kg, la fréquence cardiaque est d'environ 70 battements par minute, déterminer la loi d'échelle exprimant la fréquence cardiaque f_c d'un animal, en battements par minute, en fonction de sa masse corporelle M_c en kilogramme.

2. Étudier la validité de la loi précédente pour la souris, le lapin et l'éléphant à l'aide du tableau ci-dessous.

	Souris	Renard	Lapin	Éléphant
M_c (kg)	0,015	2,0	3,0	3000
f_c (batt/min)	620	210		37
τ_{vie} (année)	3,5		14	80

3. Le tableau donne également la durée de vie moyenne de quelques mammifères. Déterminer la loi d'échelle $\tau_{\text{vie}}(M_c)$. L'homme actuel respecte-t-il cette loi d'échelle ? Commenter.