

TD TR2 : Mathématiques pour la Physique-Chimie

Exercice 1 : Équations différentielles linéaires du 1^{er} ordre (★)

Déterminer la ou les solution(s) réelle(s) des équations différentielles suivantes.

1. $y' = 5y$
2. $2f' + 3f = 6$
3. $\sqrt{1-x^2} y' + y = 0$ sur l'intervalle $I =]-1, 1[$ sachant que $y(0) = 5$
4. $x^2 y'(x) + y(x) = x^2 + x$ sur $I =]0, +\infty[$
5. $\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = \frac{E}{\tau}$ sur $I = [0, +\infty[$ sachant que $u(0) = 0$, et où E et τ sont des constantes réelles
6. $\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = \frac{E \cos(\omega t)}{\tau}$ sur $I = [0, +\infty[$ sachant que $u(0) = 0$, et où E , τ et ω sont des constantes réelles

Exercice 2 : Principe de superposition (★)

On considère l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$(E) : a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c_1(x) + c_2(x)$$

où a , b , c_1 et c_2 sont des fonctions continues d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$.

On note :

- (E_1) : l'équation obtenue à partir de (E) lorsque $c_2 = 0$,
- (E_2) : l'équation obtenue lorsque $c_1 = 0$,
- (E_h) : l'équation homogène associée, obtenue lorsque $c_1 = c_2 = 0$.

1. Montrer que si y_1 et y_2 sont solutions de (E_h) , alors :

$$\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2, \quad \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$$

est aussi solution de (E_h) .

2. Montrer que si y_1 est solution de (E_1) et y_2 est solution de (E_2) , alors :

$$y_1 + y_2$$

est solution de (E) .

Exercice 3 : Étude d'équations différentielles du 2^e ordre (★★)

Déterminer les solutions dans $\mathbb{C}$, puis dans $\mathbb{R}$, des équations différentielles suivantes :

1. $2y'' - 3y' - 2y = 0$
2. $y'' - 4y' + 13y = 0$
3. $4y'' + 12y' + 9y = 0$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

4. $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = xe^{-x}$, où l'on cherchera une solution particulière sous la forme $x \mapsto (ax + b)e^{-x}$.
5. $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dy(t)}{dt} + \omega_0^2 y(t) = 0$, où ω_0 et Q sont deux constantes réelles strictement positives.
6. $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dy(t)}{dt} + \omega_0^2 y(t) = \omega_0^2 \cos(\omega t)$ où ω , ω_0 et Q sont trois constantes réelles strictement positives.

Exercice 4 : Principe de superposition (★)

On considère l'équation différentielle linéaire à coefficients constants du second ordre :

$$(E) : ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d_1(x) + d_2(x)$$

où a, b et c sont des constantes (avec $a \neq 0$) définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, et d_1, d_2 sont des fonctions continues de I dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On note :

- (E_1) : l'équation obtenue lorsque $d_2 = 0$
- (E_2) : l'équation obtenue lorsque $d_1 = 0$
- (E_h) : l'équation homogène associée, i.e. $d_1 = d_2 = 0$

1. Les résultats de l'exercice 2 restent-ils valables dans ce cas ?
2. Peut-on les généraliser à d'autres types d'équations différentielles ?

Exercice 5 : Méthode de séparation des variables (★★)

Transformation d'une équation thermodynamique

La température et le volume d'un gaz vérifient l'équation (où γ est une constante) :

$$\frac{dT}{dV} = \frac{(1-\gamma)T}{V}$$

1. Montrer que $T = T_0 \left(\frac{V_0}{V}\right)^{\gamma-1}$ où T_0 et V_0 sont la température et le volume initiaux.
2. On utilisera la méthode de la séparation des variables, puis on vérifiera le résultat en résolvant, comme à l'exercice 1, l'équation différentielle linéaire du premier ordre.

Mouvement d'une masse soumise à une force de rappel

Une masse ponctuelle m se déplace sans dissipation d'énergie sur l'axe $(x'x)$, et est soumise à une force :

$$\vec{f} = -kx \vec{e}_x \quad \text{avec } k > 0$$

Elle est lâchée sans vitesse initiale en une position $x_0 > 0$.

3. Étudier qualitativement le mouvement.
4. Exprimer la période T du mouvement en fonction de k et m , sachant que la conservation de l'énergie mécanique donne :

$$v = \pm \sqrt{\frac{k}{m}(x_0^2 - x^2)}$$

où $v = \frac{dx}{dt}$ est la vitesse de la masse selon la direction $\vec{e}_x$.

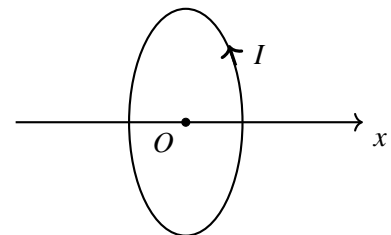
Exercice 6 : Développements limités (★)

Retrouver les DL à l'ordre 2 des 6 fonctions usuelles données dans le chapitre TR2.

Exercice 7 : Champ magnétique créé par deux spires circulaires (★★)

Le champ magnétique créé sur l'axe d'une spire circulaire de rayon R parcourue par un courant s'écrit :

$$\vec{B}(u) = B_0 f(u) \vec{e}_x \quad \text{où } f(u) = (1+u^2)^{-3/2} \quad \text{et } u = \frac{x}{R}$$



1. Que représente B_0 ?
2. Représenter l'allure de la fonction $B(u) = B_0 f(u)$.
3. Soient deux spires identiques, coaxiales, parcourues par le même courant. L'origine O est le milieu des centres O_1 et O_2 des deux spires, et d est la distance $d = O_1 O_2$.

4. Montrer que le champ magnétique créé sur l'axe par les deux spires est :

$$\vec{B}_T(u) = B_T(u) \vec{e}_x \quad \text{avec} \quad B_T(u) = B_0 \left[f\left(u + \frac{d}{2R}\right) + f\left(u - \frac{d}{2R}\right) \right]$$

5. Montrer que si $d = R$, alors au voisinage de $u = 0$, on a :

$$B_T(u) = B_T(0) + o(u^3)$$

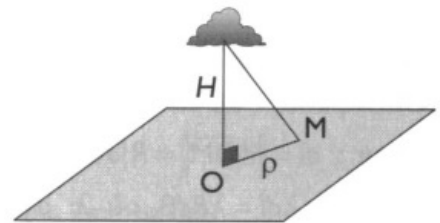
6. Quel est l'intérêt d'un tel dispositif ?

Exercice 8 : Nuage orageux (★★)

Un nuage, situé à la verticale du point O et portant une charge Q , se trouve à une altitude H au-dessus du sol. Des charges électriques se répartissent alors sur le sol suivant une répartition surfacique décrite par la densité :

$$\sigma = \frac{dq}{dS} = -\frac{QH}{2\pi(H^2 + \rho^2)^{3/2}}$$

Montrer que la charge totale répartie sur le sol est égale à $-Q$.



Exercice 9 : Distribution sphérique de charges (★★)

Une sphère S de centre O , de rayon R et de volume V , est chargée en volume avec une densité volumique de charge ρ ne dépendant que de la distance r du point considéré au centre O :

$$\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

Quelle est la charge totale Q de S ? Calculer la densité volumique moyenne de charge $\rho_m = \frac{Q}{V}$.

Exercice 10 : Masse totale de l'atmosphère (★★)

Pour estimer la masse de l'atmosphère, on se place dans le modèle suivant. La Terre est supposée sphérique de rayon $R_T = 6400$ km. L'atmosphère se comporte comme un gaz parfait de masse molaire $M = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$, s'étendant depuis le sol jusqu'à une altitude de l'ordre de 100 km, dont la température $T_0 = 273$ K est supposée constante. Dans ces conditions, la masse volumique de l'air varie avec l'altitude selon la loi :

$$\mu(z) = \frac{Mp_0}{RT_0} e^{-z/H}$$

où $p_0 = 1.10^5$ Pa est la pression au niveau du sol, $R = 8,32 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ est la constante des gaz parfaits, et :

$$H = \frac{RT_0}{Mg}$$

Évaluer la masse de l'atmosphère terrestre et la comparer à la masse de la Terre $M_T = 6.10^{24}$ kg.

Exercice 11 : Calculs combinatoires (★★)

- Combien y a-t-il de mots de 5 lettres de la forme : consonne-consonne-voyelle-consonne-voyelle ?
- Les plaques d'immatriculation des voitures sont composées de 2 lettres - 3 chiffres - 2 lettres. Les lettres I, O et U sont interdites. Il est interdit d'avoir deux W à gauche, deux S à gauche ou à droite, ni un triple 0 au milieu. Calculer le nombre de plaques possibles.
- Un aimant peut être orienté vers le bas ($\downarrow$) ou vers le haut ($\uparrow$). Combien y a-t-il de configurations maximales possibles pour N aimants ?
- De combien de façons peut-on numéroté N particules ?
- Combien d'équipes ordonnées de 3 personnes peut-on former à partir d'un groupe de 5 personnes ? Même question si l'on ne tient pas compte de l'ordre.

6. On veut asseoir 10 personnes, 5 hommes et 5 femmes, sur un banc, en respectant une alternance homme/femme. Calculer le nombre de manières possibles.

7. On reprend la question 3 avec $N = 50$.

Calculer le nombre de configurations pour lesquelles la moitié des aimants sont orientés vers le haut.

8. Justifier sans calcul que :

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

9. Calculer le nombre de mots de 8 lettres avec 0 consonne, 1 consonne, 2 consonnes, ..., 8 consonnes.

10. Montrer que l'on retrouve (dans le cas particulier où a et b sont entiers) la formule du binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Exercice 12 : Calculs combinatoires (★★)

1. On lance deux dés. Quelle est la probabilité que la somme soit égale à 6 ? que les deux dés soient des 6 ? que l'un des deux dés soit un 6 ?

2. On joue à pile ou face avec une pièce équilibrée. Quelle est la probabilité de faire pile lorsqu'on joue une fois ? de faire pile une fois lorsqu'on joue deux fois ?

3. Dans un jeu de pile ou face, combien de fois faut-il lancer la pièce pour que la probabilité de ne faire aucune face soit inférieure à 1/100 ?

4. Une urne contient n boules blanches ($n \geq 5$) et 10 boules noires. On tire au hasard et simultanément 10 boules de l'urne. Calculer la probabilité pour que l'on ait tiré 5 boules noires seulement. Comment varie cette probabilité lorsque n croît ?

Exercice 13 : Loi binomiale (★★)

On considère une assemblée de N aimants indépendants. Chaque aimant peut être orienté vers le haut ($\uparrow$) ou vers le bas ($\downarrow$). La probabilité qu'un aimant soit dans l'état $\uparrow$ est notée p .

1. Exprimer la probabilité q qu'un aimant soit orienté vers le bas en fonction de p .

2. Montrer que la probabilité de trouver k aimants dans l'état $\uparrow$ ($0 \leq k \leq N$) suit la loi binomiale :

$$P_N(k) = \binom{N}{k} p^k q^{N-k}$$

3. On définit la variable aléatoire X égale au nombre d'aimants dans l'état $\uparrow$, c'est-à-dire :

$$X : k \mapsto P_N(k)$$

Vérifier que la loi de probabilité de X est normalisée.

4. Montrer que X est la somme de N variables aléatoires X_i ($1 \leq i \leq N$) indépendantes que l'on définira.

5. Déterminer la moyenne et la variance des X_i .

6. En déduire que la moyenne et l'écart-type de X sont donnés par :

$$\langle X \rangle = Np, \quad \text{Var}(X) = Npq$$

7. Rappeler la définition de l'écart-type $\sigma(X)$ et sa signification.

8. L'écart-type relatif $\frac{\sigma(X)}{\langle X \rangle}$ quantifie les variations relatives de X autour de sa valeur moyenne. Montrer que :

$$\frac{\sigma(X)}{\langle X \rangle} = \frac{\sqrt{Npq}}{Np} = \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{Np}} \sim \frac{1}{\sqrt{N}} \quad (\text{si } p \text{ est constant})$$

Quelle approximation peut-on faire si N est très grand ?

9. Expliquer pourquoi la loi de probabilité de X tend vers une loi normale lorsque N tend vers l'infini.

10. On souhaite appliquer les résultats des questions précédentes à une autre situation physique. Un gaz à l'équilibre est constitué de $N \sim 10^{24}$ particules (atomes ou molécules) indépendantes dans un volume total V .

10.1. Étudier la variable aléatoire X égale au nombre de particules contenues dans une région ouverte de volume $v \leq V$.

10.2. Expliquer pourquoi la densité de particules peut être considérée comme constante.

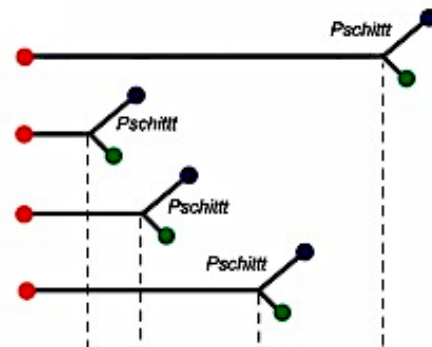
Exercice 14 : Loi exponentielle (★★★)

On s'intéresse à l'aspect mathématique de la désintégration naturelle d'une particule radioactive (exemples : muons, carbone 14, ...). On considère $N_0 \gg 1$ particules radioactives identiques à la date $t = 0$, et l'on note $N(t)$ le nombre de particules restantes à la date t .

La désintégration étant un processus aléatoire, on ne peut pas prédire la date de désintégration d'une particule donnée. Ce caractère aléatoire est illustré par un schéma montrant que les dates t_i de désintégration des particules i sont toutes différentes.

L'hypothèse mathématique fondamentale est la suivante : « une particule radioactive ne vieillit pas ». Autrement dit, la probabilité qu'elle se désintègre dans la seconde qui suit est indépendante de son passé. Cela signifie que la probabilité qu'une particule radioactive se désintègre dans la seconde qui suit son observation est la même, qu'elle soit apparue il y a une microseconde ou il y a un million d'années.

On note λ la probabilité de désintégration par unité de temps.



1. Montrer que $N(t)$ vérifie une équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre, puis en déduire l'évolution de $N(t)$.

2. La période T d'une particule radioactive est la durée au bout de laquelle le nombre de particules est divisé par 2. Relier T à λ .

3. L'uranium présent dans l'écorce terrestre se trouve essentiellement sous forme de deux isotopes, l'uranium 235 et l'uranium 238 dont les périodes sont indiquées ci-contre. En supposant qu'au moment de la création de la Terre les quantités des deux isotopes étaient égales, estimer l'âge de la Terre.

Isotope	Abondance actuelle	Période T (en années)
^{238}U	99,3 %	$4,7 \times 10^9$
^{235}U	0,7 %	$0,7 \times 10^9$

4. Soit X la variable aléatoire représentant la durée de vie d'une particule radioactive, observée à partir de $t = 0$. On note $f(t)$ et $F(t)$ la densité de probabilité et la fonction de répartition associées :

$$P(t \leq X < t + dt) = f(t) dt, \quad P(X < t) = F(t)$$

On a également :

$$P(X \geq t) = 1 - F(t)$$

4.1. Montrer que F vérifie une équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre que l'on résoudra.

4.2. En déduire l'expression de la densité de probabilité $f(t)$.

4.3. Relier la durée de vie moyenne d'une particule à la période définie précédemment.