

Chapitre TR1 : Dimensions, unités, homogénéité

Notions et contenus	Capacités
Écriture d'un résultat d'une mesure.	Écrire avec un nombre de chiffres significatifs adapté, le résultat d'une mesure.
Dérivée. Notation $\frac{dx}{dt}$.	Utiliser la formule de Taylor à l'ordre un ou deux ; interpréter
Primitive et intégrale.	Interpréter l'intégrale comme une somme de contributions infinitésimales, en lien avec la méthode des rectangles en mathématiques.

1. Dimension d'une grandeur

Une grandeur est caractérisée par sa **dimension** qui indique sa **nature physique**. Exemples : une longueur, un temps, une puissance, etc... sont des dimensions physiques.

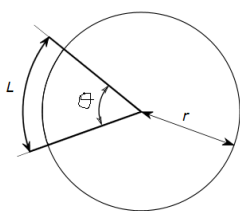
Dimensions de base du système international

N'importe quelle dimension peut être exprimée en fonction des 7 dimensions de base suivantes :

- la longueur, notée L ;
- la masse, notée M ;
- le temps, notée T ;
- le courant électrique, notée I ;
- la quantité de matière, notée N ;
- la température, notée Θ ;
- l'intensité lumineuse, notée J .

La dimension d'une grandeur est habituellement notée entre crochets. Exemple : une vitesse v a pour dimension le rapport d'une longueur sur un temps, ce que l'on notera de façon mathématique $[v] = L/T$.

Remarque 1 : Un angle est adimensionné



Un angle est le rapport entre deux longueurs ; un angle n'a donc pas de dimension physique. On rappelle qu'un radian est l'angle plan, qui, ayant son sommet au centre d'un cercle, intercepte, sur la circonférence de ce cercle, un arc d'une longueur égale à celle du rayon du cercle. Un cercle complet représente donc un angle de 2π rad et un arc de cercle de rayon r et vu sous un angle θ (en rad) a une longueur $L = r\theta$.

▲ Faire l'exercice n° 6

2. Unités du système international (SI)

La dimension d'une grandeur n'indique pas avec quelle unité elle est exprimée. Une grandeur dont la dimension est une longueur peut s'exprimer en mètres, en miles, en années-lumière, etc. . .

Afin d'être compréhensible, il est nécessaire de s'exprimer dans un langage universel, d'où la nécessité de se conformer au système international d'unités (SI).

Il est fondé sur sept unités de base associées aux sept dimensions fondamentales. Les autres unités peuvent s'obtenir en fonction des unités de base du SI grâce aux relations algébriques liant les grandeurs physiques.

2.1. Les unités de base du SI

Dimension	unité SI	symbole
Longueur	mètre	m
Masse	kilogramme	kg
Temps	seconde	s
Courant électrique	ampère	A
Quantité de matière	mole	mol
Température	kelvin	K
Intensité lumineuse	candela	cd

2.2. D'autres unités SI

Dimension	Unité SI
Surface	m^2
Volume	m^3
Vitesse	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
Accélération	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
Période	s
Fréquence	Hz
Masse volumique	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Force	N
Énergie, travail	J
Puissance	W
Pression	Pa
Masse linéique	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-1}$
Tension électrique	V
Charge électrique	C

TABLE 1.1 – Quelques dimensions et leurs unités SI

Dimension	Relation(s) connue(s)	Dimensions / unités de base
Fréquence	$f = 1/T$ (Inverse d'une période)	T^{-1} ; unité : s^{-1} (Hz)
Force	$F = ma$	$\text{M} \cdot \text{L} \cdot \text{T}^{-2}$; unité : $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ (N)
Énergie, travail	$E = Fd$	$\text{M} \cdot \text{L}^2 \cdot \text{T}^{-2}$; unité : $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ (J)
Puissance	$P = E/t$	$\text{M} \cdot \text{L}^2 \cdot \text{T}^{-3}$; unité : $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$ (W)
Pression	$P = F/S$	$\text{M} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{T}^{-2}$; unité : $\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ (Pa)

TABLE 1.2 – Dimensions et unités dans le SI de base

▲ Faire l'exercice n° 7

2.3. Quelques unités hors du SI

Dimension	Unité	Symbole	Équivalent
Temps	minute	min	1 min = 60 s
	heure	h	1 h = 3600 s
	jour (day)	d	1 d = 86400 s
Longueur	année-lumière	a.l	1 a.l = 9,15.10 ¹⁵ m
	unité astronomique	UA	1 UA = 1,496.10 ⁸ km
	Angström	Å	1 Å = 10 ⁻¹⁰ m
Volume	litre	L	1 L = 10 ⁻³ m ³
Énergie	calorie	cal	1 cal = 4,18 J
	électron-volt	eV	1 eV = 1,6.10 ⁻¹⁹ J
Masse	masse-énergie correspondante	MeV · c ⁻²	1 MeV · c ⁻² = 1,8.10 ⁻³⁰ kg
	unité de masse atomique	u	1 u = 1,7.10 ⁻²⁷ kg
Pression	atmosphère	atm	1 atm = 1,013.10 ⁵ Pa
	bar	bar	1 bar = 10 ⁵ Pa

3. Analyse dimensionnelle

3.1. Dérivée, intégrale et dimension

Soit f une grandeur dépendant de la variable x et dérivable en $x = x_0$. Par définition :

$$f'(x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)}{(x_0 + \varepsilon) - x_0}$$

Remarque 2 : Notation différentielle

La dérivée de f est donc le rapport d'une variation infinitésimale de f , que l'on note en physique df , sur la variation infinitésimale de x correspondante, notée dx . La notation différentielle suivante de la dérivée est très utile en Physique.

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$$

Dimensions des dérivées

La dimension de la dérivée $f'(x)$ d'une grandeur f fonction d'une grandeur x est le rapport de la dimension de f sur la dimension de x :

$$[f'] = \frac{[f]}{[x]} = [f] \cdot [x]^{-1}$$

Une conséquence immédiate est que $[f''] = [f] \cdot [x]^{-2}$ et de façon plus générale, en désignant $f^{(n)}$ la dérivée n -ième de f :

$$[f^{(n)}] = [f] \cdot [x]^{-n}$$

Exemple : si $u(t)$ représente une tension électrique en fonction du temps t alors sa dérivée u' a pour dimension une tension sur un temps et u'' une tension sur un temps au carré.

L'étude précédente permet d'affirmer le résultat suivant (poser $f' = g$ si vous ne le voyez pas).

Dimension d'une primitive

La dimension de la primitive $\int f \, dx$ d'une grandeur $f(x)$ est le produit de la dimension de f par la dimension de x :

$$[\int f \, dx] = [f][x]$$

Remarque 3 : Interprétation

Une autre façon de démontrer ce résultat est d'interpréter l'intégrale comme une somme d'aires de rectangles :

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$$

où $\Delta x = (b - a)/n$ et x_i^* un point dans le i -ième intervalle $[x_{i-1}, x_i]$.

3.2. Les règles de l'analyse dimensionnelle

Trois règles

- On ne peut additionner ou soustraire que des grandeurs de même dimension ;
- Les deux membres d'une égalité doivent nécessairement avoir la même dimension : on dit que la relation est **homogène** ;
- Dans une relation traduisant une loi physique, l'argument des fonctions sinus, sinus hyperbolique, cosinus, cosinus hyperbolique, tangente, tangente hyperbolique, exponentielle, logarithme, est sans dimension et leur résultat est lui aussi sans dimension.

Une relation non homogène est forcément fausse mais une relation homogène n'est pas nécessairement vraie. Exemple : la relation $T = \sqrt{\ell/g}$ donnant la période des petites oscillations d'un pendule simple de longueur ℓ dans un champ de pesanteur g est homogène mais fausse ; la relation correcte est $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$.

On donnera en exercice des éléments d'explications de la 3^e règle. Cette règle concerne l'expression de loi physique ; elle n'interdit pas de calculer ou de définir, par exemple, le logarithme d'une grandeur dimensionnée (pourvu qu'elle soit strictement positive). C'est d'ailleurs ce que l'on fait lorsqu'on représente le diagramme de Bode d'un filtre en fonction du logarithme de la fréquence, ou la vitesse d'une réaction chimique en fonction du logarithme de la concentration en une espèce.

Lorsqu'on a identifié les grandeurs physiques pertinentes d'un problème, on peut trouver, à un facteur près, une relation liant ces grandeurs par simple analyse dimensionnelle.

▲ Faire les exercices n° 8, 9, 10

Annexe 1 : Préfixes

Préfixe	Symbole	Valeur
femto	f	10^{-15}
pico	p	10^{-12}
nano	n	10^{-9}
micro	μ	10^{-6}
milli	m	10^{-3}
centi	c	10^{-2}
deci	d	10^{-1}
deca	da	10^1
hecto	h	10^2
kilo	k	10^3
mega	M	10^6
giga	G	10^9
tera	T	10^{12}
péta	P	10^{15}

Annexe 2 : Révision du SI en 2018



La 26^e Conférence Générale des Poids et Mesures (CGPM) s'est tenue du 16 au 18 novembre 2018. Elle définit les étalons de mesures et se réunit tous les 4 ans depuis 1889 année où l'on a défini les prototypes du mètre et du kilogramme.

En 1983, la CGPM a fixé la valeur de la vitesse de la lumière dans le vide :

$$c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

C'est donc une valeur exacte, par définition.

Le mètre est alors défini à partir de cette constante fondamentale et de l'unité de temps :

1 mètre = distance parcourue par la lumière dans le vide pendant $1/299792458$ s où

1 seconde = 9 192 631 770 périodes du rayonnement émis lors de la transition hyperfine de l'état fondamental de l'atome de césium 133.

Lors de cette 26^e CGPM les physiciens ont décidé de procéder comme pour le mètre : ils ont fixé les valeurs des autres constantes fondamentales à partir desquelles sont maintenant définies les unités.

Conséquences : la température du point triple de l'eau n'est plus tout à fait égale à 273,16 K, le nombre d'atomes de carbone 12 dans 12 g de carbone 12 n'est plus tout à fait égal au nombre d'Avogadro. . Évidemment, pour nous en classe préparatoires, ceci n'entraîne aucune conséquence mais il est intéressant de comprendre ce changement important dans la métrologie.

Annexe 3 : Constantes

On reprend tout d'abord 5 des principales constantes fondamentales en indiquant leurs valeurs SI avec 3 chiffres significatifs. Rappelons que les valeurs des constantes fondamentales sont maintenant fixées.

Constante fondamentale	Valeur en unité SI
Vitesse de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Charge élémentaire	$e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Constante de Planck	$h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Constante de Boltzmann	$k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
Constante d'Avogadro	$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Constante	Valeur en unité SI
Masse de l'électron	$m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Masse du proton	$m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Masse du neutron	$m_n = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Magnéton de Bohr	$\mu_B = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ J} \cdot \text{T}^{-1}$
Constante des gaz parfaits	$R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Constante de gravitation	$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$