

Chapitre TR2 : Mathématiques pour la Physique-Chimie

Notions et contenus	Capacités
Équations différentielles linéaires à coefficients constants.	Identifier l'ordre. Mettre l'équation sous forme canonique.
Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants : $y' + ay = f(x)$. Équations différentielles linéaires du 2 ^e ordre à coefficients constants : $y'' + ay' + by = f(x)$.	Trouver la solution générale de l'équation sans second membre (équation homogène). Trouver l'expression des solutions lorsque $f(x)$ est constante ou de la forme $A \cos(\omega x + \phi)$ (en utilisant la notation complexe). Utiliser l'équation caractéristique pour trouver la solution générale de l'équation sans second membre. Prévoir le caractère borné ou non de ses solutions (critère de stabilité). Trouver l'expression des solutions lorsque $f(x)$ est constante ou de la forme $A \cdot \exp(\lambda x)$ avec λ complexe. Trouver la solution de l'équation complète correspondant à des conditions initiales données.
Autres équations différentielles d'ordre 1 ou 2.	Séparer les variables d'une équation du premier ordre à variables séparables. Faire le lien entre les conditions initiales et le graphe de la solution correspondante.
Fonctions usuelles.	Exponentielle, logarithme népérien et décimal, cosinus, sinus, tangente, puissance réelle.
Dérivée. Notation $\frac{dx}{dt}$. Développements limités	Utiliser la formule de Taylor à l'ordre un ou deux ; interpréter graphiquement. Connaître et utiliser les développements limités à l'ordre 1 des fonctions $1 + x^\alpha$, $\exp x$, $\ln 1 + x$, et à l'ordre 2 des fonctions $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

Ce chapitre n'est pas un cours de mathématiques ! Il rassemble quelques résultats et outils mathématiques importants pour l'enseignement de physique-chimie de 1^{ère} année (sections 1. et 2.) et de 2^e année (sections 3. et 4.).

- **Équations différentielles** : savoir résoudre des équations différentielles linéaires du 1^{er} ordre, du 2^e ordre à coefficients constants, et maîtriser la technique de séparation des variables sont des compétences à acquérir dès le début de la 1^{ère} année.
- **Développements limités** : savoir écrire et utiliser les développements limités de quelques fonctions simples est également une compétence essentielle à maîtriser rapidement en 1^{re} année.
- **Calcul intégral** : l'étude de cette partie peut être abordée après la 1^{ère} année. Elle est utile pour préparer la 2^e année, notamment dans le cadre du théorème de Gauss ou des bilans de grandeurs sous forme intégrale.
- **Probabilités** : cette partie, dont la plupart des notions ont été vues au lycée, peut être étudiée après la 1^{ère} année. Elle permet de justifier certains calculs d'incertitudes de mesure et de comprendre pourquoi les grandeurs à l'équilibre d'un système thermodynamique macroscopique sont bien définies. Son étude facilitera l'apprentissage de la thermodynamique statistique, mais aussi de la physique quantique de 2^e année.

1. Équations différentielles

Dans la suite, on note y une fonction définie sur $\mathbb{R}$ (ou un intervalle I de $\mathbb{R}$) à valeurs dans un corps $\mathbb{K}$, qui sera soit $\mathbb{R}$, soit $\mathbb{C}$.

1.1. Équations linéaires

Une **équation différentielle** est dite **linéaire** si elle vérifie les conditions suivantes :

- La fonction inconnue (souvent notée y) et ses dérivées apparaissent **au premier degré** ;
- Il n'y a **aucun produit** entre y , y' , y'' , etc.
- Les coefficients peuvent être des fonctions de la variable indépendante (souvent x), mais ne doivent pas dépendre de y .

Forme générale d'ordre n :

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x)$$

où

- les $a_i(x)$ et $f(x)$ sont des fonctions continues définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$;
- $y^{(k)}(x)$ désigne la dérivée k -ième de y .

Cas particuliers :

- Si $f(x) = 0$, l'équation est dite **homogène**.
- Si $f(x) \neq 0$, elle est **non homogène**.

On donne ci-dessous des exemples et contre-exemples. Pour alléger l'écriture on omet la variable x pour y et ses dérivées.

Exemples d'équations linéaires	Exemple d'équations non linéaires
$y'' + 3y' - 4y = \sin(x)$	$y' + y^2 = 0$
$x^2 y'' + xy' + y = 0$	$y'' + y \cdot y' = 0$
$y''' + \ln(x)y' + \sqrt{x}y = e^x$	$y' + \sin(y) = 0$
$y' - 5y = 2x$	$y'' + (y')^2 = 1$

Principe de superposition

- Si $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont deux solutions d'une équation différentielle **linéaire homogène**, alors toute combinaison linéaire

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \quad \text{avec } c_1, c_2 \in \mathbb{K},$$

est aussi une solution.

- La solution générale d'une équation différentielle linéaire non homogène s'écrit :

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x)$$

où :

- $y_p(x)$ est une solution particulière de l'équation non homogène ;
- $y_h(x)$ est la solution générale de l'équation homogène associée.

1.2. Équations linéaires du 1^{er} ordre

On reprend tout d'abord les définitions du paragraphe précédent avec des notations différentes plus pratiques.

- Une **équation différentielle linéaire du premier ordre** (E) s'écrit :

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x)$$

où $a(x)$, $b(x)$, et $c(x)$ sont des fonctions continues définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

- Si la fonction c est nulle (i.e. $\forall x \in I, c(x) = 0$), alors (E) est dite **homogène** (ou *sans second membre*).
- L'équation différentielle homogène (E_h) associée à (E) est celle obtenue pour $c = 0$, et s'écrit donc :

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$$

Solutions de l'équation homogène (E_h)

Si a ne s'annule pas sur l'intervalle I (i.e. : $\nexists x \in I$ tel que $a(x) = 0$), alors les solutions de (E_h) s'écrivent :

$$y_h(x) = \lambda \exp(A(x))$$

où $\lambda \in \mathbb{K}$, et A est *une* primitive de la fonction $x \mapsto -\frac{b(x)}{a(x)}$, définie sur I .

Solutions de l'équation avec second membre (E)

L'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions y telles que

$$y = y_p + y_h$$

où y_p est une solution de (E) (appelée aussi une solution particulière) et y_h une solution quelconque de l'équation homogène (E_h).

Généralement en physique-chimie, les fonctions a , b (et c) sont constantes donc on peut choisir $A : x \mapsto -\frac{b}{a}x$ qui est bien une primitive de la fonction $x \mapsto -b(x)/a(x) = -b/a$. De plus il est souvent assez simple de deviner une solution particulière y_p pour les équations différentielles obtenues en physique-chimie.

Problème de Cauchy

Si a ne s'annule pas sur I , alors pour tout $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$, le problème (appelé *problème de Cauchy*) :

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x) \quad \text{et} \quad y(x_0) = y_0$$

admet une **unique solution** sur I .

En physique-chimie, on considère souvent $I = [0, +\infty[$ et $x_0 = 0$. La seconde égalité du problème de Cauchy fixe alors ce qu'on appelle la *condition initiale*.

▲ Faire les exercices n° 1 et 2

1.3. Équations linéaires du 2^e ordre à coefficients constants

- On appelle **équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants** une équation différentielle (E) de la forme :

$$a y''(x) + b y'(x) + c y(x) = d(x)$$

où $a, b, c \in \mathbb{K}$ sont des constantes avec $a \neq 0$, et d est une fonction continue définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

- Si la fonction d est nulle, alors (E) est dite **homogène** (ou *sans second membre*).
- L'équation différentielle homogène associée, notée (E_h) , est celle obtenue pour $d = 0$, et s'écrit donc :

$$a y''(x) + b y'(x) + c y(x) = 0$$

- L'**équation caractéristique** associée à (E) est l'équation algébrique suivante d'inconnue $r \in \mathbb{K}$:

$$ar^2 + br + c = 0$$

Solutions générales y_h de l'équation homogène (E_h) (sans second membre)

- Si $\Delta \neq 0$, alors :

$$y_h(x) = \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}$$

où r_1 et r_2 sont les deux racines (distinctes) de l'équation caractéristique, et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$.

- Si $\Delta = 0$, alors :

$$y_h(x) = (\lambda_1 + \lambda_2 x) e^{r_0 x}$$

où r_0 est la racine double de l'équation caractéristique, et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$.

Solutions de l'équation complète (E) (avec second membre)

L'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions y telles que :

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x)$$

où :

- y_p est **une solution particulière** de (E) (non homogène) ;
- y_h est une solution quelconque de l'équation (E_h) (homogène).

Ce résultat important découle de la linéarité de l'équation différentielle.

Dans la suite on note Δ le **discriminant** de l'équation caractéristique.

Cas réel : on considère la situation (fréquente en physique-chimie) où $a, b, c \in \mathbb{R}$, et où la solution y est à valeurs réelles, autrement dit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Le cas $\Delta \neq 0$ se décompose alors en deux sous-cas :

- Si $\Delta > 0$, alors les racines r_1 et r_2 sont réelles distinctes ;
- Si $\Delta < 0$, alors les racines r_1 et r_2 sont complexes conjuguées :

$$r_1 = \alpha + i\beta, \quad r_2 = \alpha - i\beta \quad (\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}^*)$$

Solutions générales y_h de (E_h) dans le cas réel

– Si $\Delta > 0$, alors :

$$y_h(x) = \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}$$

avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, et $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$.

– Si $\Delta < 0$, alors :

$$y_h(x) = (\lambda_1 \cos(\beta x) + \lambda_2 \sin(\beta x)) e^{\alpha x}$$

avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, et $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$.

– Si $\Delta = 0$, alors :

$$y_h(x) = (\lambda_1 + \lambda_2 x) e^{r_0 x}$$

avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, et $r_0 \in \mathbb{R}$ est la racine double.

Problème de Cauchy

On suppose que l'équation différentielle (E) admet une solution sur un intervalle I .

Alors, pour tout $(x_0, y_0, y'_0) \in I \times \mathbb{K}^2$, le **problème de Cauchy** suivant :

$$\begin{cases} ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$$

admet une **unique solution** sur I .

En physique-chimie, on considère souvent $I = [0, +\infty[$ et $x_0 = 0$. Les deux dernières égalités du problème de Cauchy fixent alors ce qu'on appelle les **conditions initiales**. Elles sont définies par **deux égalités** : une pour la fonction y et une pour sa dérivée y' , car l'équation différentielle est d'ordre 2.

▲ Faire les exercices n° 3 et 4

1.4. Technique de séparation des variables

Soit $v(t)$ la vitesse d'un objet immobile à $t = 0$ vérifiant pour $t \geq 0$ l'équation différentielle non linéaire suivante :

$$v'(t) + \frac{v^2(t)}{v_\infty \tau} = \frac{v_\infty}{\tau}$$

soit, en utilisant l'écriture différentielle :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v^2}{v_\infty \tau} = \frac{v_\infty}{\tau}$$

Remarque 1 : Paramètres de l'équation différentielle

Le paramètre τ est le temps caractéristique d'évolution de la vitesse et v_∞ est la vitesse limite lorsque $t \rightarrow +\infty$.

En effet, l'équation différentielle évaluée pour $t \rightarrow +\infty$ donne $0 + \frac{v_\infty^2}{v_\infty \tau} = \frac{v_\infty}{\tau}$

À cause du carré, cette équation n'est pas linéaire, mais on peut la résoudre par séparation des variables :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{v_\infty}{\tau} - \frac{v^2}{v_\infty \tau} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dv}{v_\infty \left(1 - \left(\frac{v}{v_\infty} \right)^2 \right)} = \frac{dt}{\tau}$$

Le membre de gauche dépend uniquement de la variable vitesse, et celui de droite du temps. On intègre entre la situation initiale et une situation à un instant t quelconque :

- la variable (muette) t' varie entre 0 et t ;
- la variable (muette) v' varie entre 0 (vitesse nulle au départ) et v (vitesse à l'instant t).

$$\int_0^v \frac{1}{v_\infty \left(1 - \left(\frac{v'}{v_\infty}\right)^2\right)} dv' = \int_0^t \frac{1}{\tau} dt'$$

Remarque 2 : Variable muette

Il ne faut pas confondre la variable muette et la borne d'intégration supérieure même si ces grandeurs sont souvent notées avec la même lettre comme ici :

$$\int_0^v \frac{1}{v_\infty \left(1 - \left(\frac{v}{v_\infty}\right)^2\right)} dv = \int_0^t \frac{1}{\tau} dt$$

La seconde intégrale donne $\frac{t}{\tau}$. Pour la première, on effectue le changement de variable $u = \frac{v'}{v_\infty}$, d'où $dv' = v_\infty du$, ce qui donne :

$$\int_0^v \frac{dv'}{v_\infty \left(1 - \left(\frac{v'}{v_\infty}\right)^2\right)} = \int_0^{v/v_\infty} \frac{du}{1 - u^2} = [\operatorname{argth}(u)]_0^{v/v_\infty} = \operatorname{argth}\left(\frac{v}{v_\infty}\right)$$

Ainsi, on obtient :

$$\operatorname{argth}\left(\frac{v(t)}{v_\infty}\right) = \frac{t}{\tau} \quad \Rightarrow \quad v(t) = v_\infty \tanh\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

La méthode de séparation des variables peut également être utilisée pour résoudre des équations différentielles linéaires.

▲ Faire l'exercice n° 5

2. Développements limités

2.1. Formule de Taylor-Young

DL à l'ordre n

Soient $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, et f une fonction « suffisamment régulière » sur I . Alors f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de tout point $a \in I$:

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Remarque 3 : Fonction régulière

Précisons ce qu'on entend par « suffisamment régulière » : la fonction f est de classe C^n sur I , ce qui signifie qu'elle est n fois dérivable sur I , et que la dérivée n -ième, notée $f^{(n)}$, est continue sur I . Les dérivées d'ordre inférieur $f^{(k)}$, pour $0 \leq k < n$, sont aussi continues car elles sont dérivables. On notera aussi que, par convention, on pose $f^{(0)} = f$.

Remarque 4 : Notation o

La notation $o((x-a)^n)$, qui se lit « petit o de $(x-a)$ puissance n », désigne une fonction négligeable devant $(x-a)^n$ au voisinage de a , c'est-à-dire une fonction qui tend vers 0 en a plus rapidement que la fonction $x \mapsto (x-a)^n$. Autrement dit, il existe une fonction ε définie sur I telle que :

$$o((x-a)^n) = (x-a)^n \varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$$

2.2. Exemples

DL en 0 fréquemment utilisés

– Fonction rationnelle :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n)$$

– Puissance réelle : pour $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

– Exponentielle :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

– Logarithme népérien :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + o(x^n)$$

– Sinus :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$$

– Cosinus :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

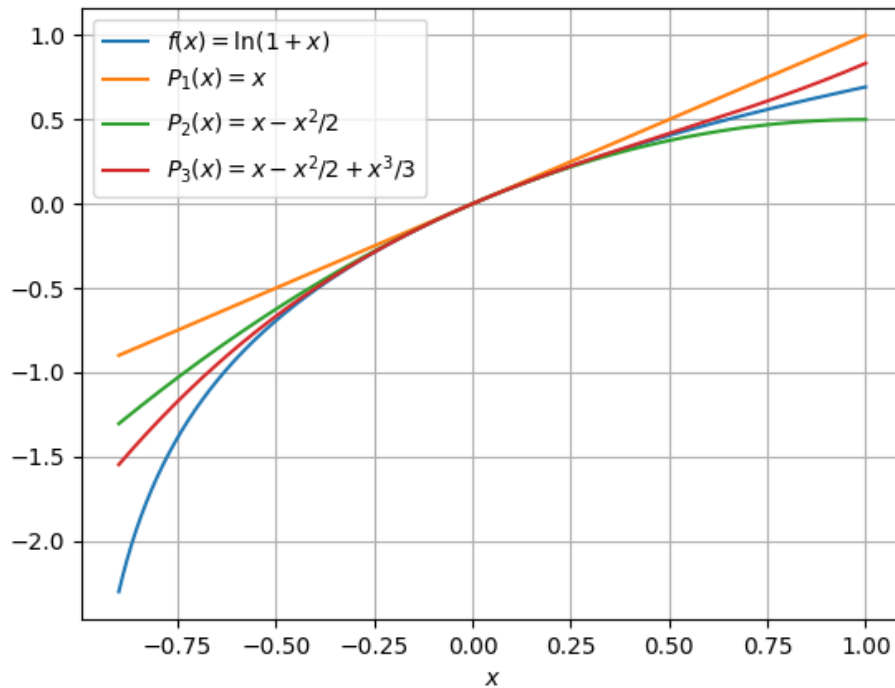
On remarque sur les deux derniers exemples que la partie régulière (partie polynomiale) du développement limité ne présente que des puissances paires (resp. impaires) si la fonction est paire (resp. impaire). Ceci est un résultat général : si f est paire alors sa dérivée est impaire et donc sa dérivée seconde paire, et, par récurrence, toute dérivée d'ordre impaire est impaire, donc $f^{(n)}(0) = 0$ si n est impaire. Le raisonnement est similaire si f est impaire : dans ce cas ses dérivées d'ordre paire sont impaires et s'annulent donc en 0.

2.3. Approximations polynomiales

Traçons sur un intervalle autour de $a = 0$ la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ et de ses parties régulières

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$$

pour les trois premiers ordres $n = 1, 2, 3$.



L'approximation polynomiale $f(x) \approx P_n(x)$ est d'autant meilleure que l'intervalle considéré autour de a est petit et/ou que l'ordre n est élevé. On notera bien que l'approximation à l'ordre 1 consiste à approcher la courbe représentative de la fonction par sa tangente (approximation linéaire) et à l'ordre 2 par une parabole.

▲ Faire les exercices n° 6 et 7

3. Calcul intégral

On utilise ici le calcul intégral pour retrouver les expressions connues de longueur, de surfaces et de volumes. Les exercices proposés en TD utilisent ce type de calcul pour déterminer des masses ou des charges électriques.

3.1. Vecteurs déplacement élémentaire

Système	Cartésien	Cylindrique	Sphérique
Schéma			
Vecteur déplacement élémentaire	$d\vec{OM} = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z$	$d\vec{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z$	$d\vec{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\phi \vec{e}_\phi$

3.2. Longueurs, surfaces et volumes élémentaires

On considère la portion élémentaire d'espace de volume dV « situé » entre les points M et M' séparés par la longueur élémentaire $d\ell$. Les arêtes du volume dV sont représentées ci-dessus en trait gras pour trois d'entre-elles et en tirets pour les neuf autres. Notons que ses arêtes sont toutes rectilignes uniquement pour le système cartésien. On notera dS la surface d'une des faces de cette portion obtenue en fixant l'une des coordonnées.

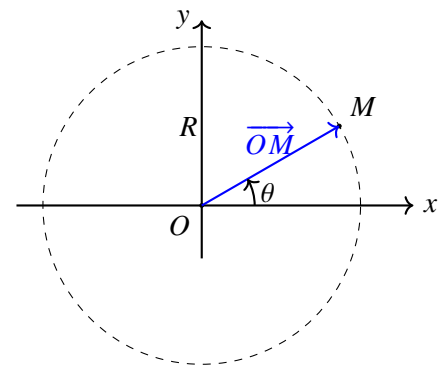
Système	Cartésien	Cylindrique	Sphérique
Longueur élémentaire	$d\ell = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$	$d\ell = \sqrt{(dr)^2 + (r d\theta)^2 + (dz)^2}$	$d\ell = \sqrt{(dr)^2 + (r d\theta)^2 + (r \sin \theta d\varphi)^2}$
Volume élémentaire	$dV = dx dy dz$	$dV = dz \cdot dr \cdot r d\theta = r dr d\theta dz$	$dV = dr \cdot r d\theta \cdot r \sin \theta d\varphi = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$
Surface élémentaire	– x fixé : $dS = dy dz$ – y fixé : $dS = dx dz$ – z fixé : $dS = dx dy$	– r fixé : $dS = r d\theta dz$ – θ fixé : $dS = dr dz$ – z fixé : $dS = r d\theta dr$	– r fixé : $dS = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ – θ fixé : $dS = r \sin \theta dr d\varphi$ – φ fixé : $dS = r dr d\theta$

3.3. Applications du calcul intégral

3.3.1. Périmètre d'un cercle

On choisit un système de coordonnées cylindriques de telle façon que le cercle soit centré en O , dans le plan $z = 0 = \text{cste}$. Ainsi $dz = 0$ et $r = R = \text{cste}$, donc $dr = 0$. La distance élémentaire entre deux points du cercle est donc $d\ell = R d\theta$ et son périmètre est :

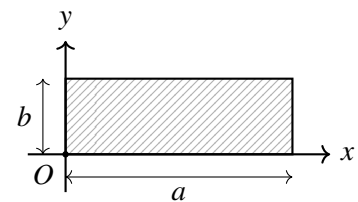
$$P = \int d\ell = \int_{\theta=0}^{2\pi} R d\theta = 2\pi R$$



3.3.2. Surface d'un rectangle

On choisit un système cartésien de telle façon que $0 \leq x \leq a$ et $0 \leq y \leq b$, où a et b sont donc les longueurs des côtés.

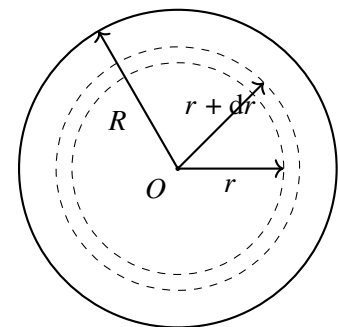
$$S = \int dS = \iint_{\substack{0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq b}} dx dy = \int_{x=0}^a dx \int_{y=0}^b dy = ab$$



3.3.3. Surface d'un disque

On choisit le même système de coordonnées que dans le premier exemple. L'élément de surface est $dS = r d\theta dr$ puisque z est fixé.

$$S = \int dS = \iint_{\substack{0 \leq r \leq R \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi}} r d\theta dr = \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{r=0}^R r dr = 2\pi \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_0^R = \pi R^2$$



Remarque 5 : Interprétation

On voit que $S = \int_{r=0}^R 2\pi r dr$ car $2\pi r dr$ représente la surface élémentaire comprise entre les cercles de rayon r et $r + dr$. Pour le voir, il suffit d'imaginer que l'on découpe cette couronne radialement, puis qu'on l'étale : on obtient alors un rectangle de longueur $2\pi r$ et de largeur dr .

3.3.4. Surface latérale d'un cylindre

On travaille en coordonnées cylindriques avec $r = R$ fixé, donc l'élément de surface à intégrer est $dS = R d\theta dz$.

$$S = \iint_{\substack{0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq h}} R d\theta dz = R \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{z=0}^h dz = 2\pi R h$$

Là aussi, on peut écrire :

$$S = \int_{z=0}^h 2\pi R dz$$

puisque $2\pi R dz$ est la surface de la bande élémentaire de hauteur dz .

3.3.5. Surface d'une sphère

On travaille en coordonnées sphériques avec $r = R$ fixé, donc l'élément de surface est :

$$dS = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi.$$

On calcule alors la surface :

$$S = \iint_{\substack{0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi}} R^2 \sin \theta d\theta d\varphi = R^2 \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta d\theta.$$

Le calcul donne :

$$S = R^2 \cdot 2\pi \cdot [-\cos \theta]_0^{\pi} = 2\pi R^2 \cdot (-\cos \pi + \cos 0) = 2\pi R^2 \cdot (1+1) = 4\pi R^2$$

3.3.6. Volume d'un cylindre

On reprend le système de coordonnées cylindriques, et l'élément de volume à intégrer est :

$$dV = r dr d\theta dz.$$

On calcule le volume :

$$V = \iiint_{\substack{0 \leq r \leq R \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq h}} r dr d\theta dz = \int_{r=0}^R r dr \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{z=0}^h dz = \pi R^2 h.$$

3.3.7. Volume d'une boule

Dans le système sphérique, l'élément de volume est :

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi.$$

On obtient :

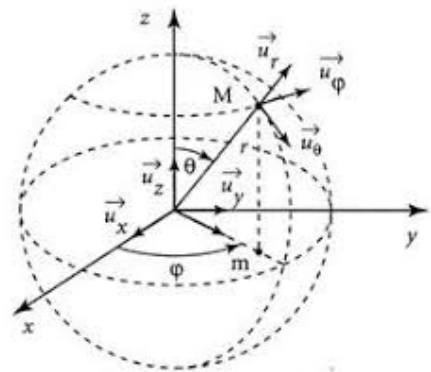
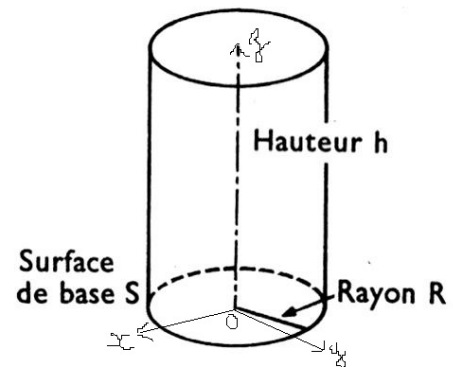
$$V = \iiint_{\substack{0 \leq r \leq R \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi}} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \int_{r=0}^R r^2 dr \int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta d\theta \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{3} R^3 \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Remarque 6 : Interprétation

L'égalité :

$$V = \int_{r=0}^R 4\pi r^2 dr$$

s'interprète de la façon suivante : $4\pi r^2 dr$ est le volume élémentaire d'une coquille sphérique située entre les



boules de rayons r et $r + dr$. On peut d'ailleurs aussi vérifier que :

$$\frac{4}{3}\pi(r+h)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = 4\pi r^2 h + o(h) \quad \text{pour } h \rightarrow 0$$

Relations à connaître

Grandeur	Expression mathématique
Périmètre d'un cercle de rayon r	$P = 2\pi r$
Surface d'un disque de rayon r	$S = \pi r^2$
Surface latérale d'un cylindre de rayon r , hauteur h	$S = 2\pi r h$
Surface d'une sphère de rayon r	$S = 4\pi r^2$
Volume d'un cylindre de rayon r , hauteur h	$V = \pi r^2 h$
Volume d'une boule (sphère pleine) de rayon r	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

▲ Faire les exercices n° 8, 9, 10

4. Probabilités

4.1. Arrangements et combinaisons

Le nombre de mots de 3 lettres ne comportant pas deux fois la même lettre (dans l'alphabet latin) est égal à :

$$26 \times 25 \times 24$$

que l'on note :

$$A_{26}^3$$

Un mot est un **arrangement sans répétition** de 3 lettres distinctes prises dans un ensemble de 26 lettres distinctes.

On appelle **arrangement sans répétition** une suite ordonnée de p éléments distincts pris dans un ensemble de $n \geq p$ éléments distincts. Le nombre d'arrangements sans répétition de p éléments parmi n est :

$$A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

A_n^p est donc aussi égal au nombre d'**injections** d'un ensemble de p éléments dans un ensemble à $n \geq p$ éléments.

On cherche le nombre de façons de choisir 3 lettres distinctes dans l'alphabet **sans prendre en compte l'ordre** des lettres.

On sait qu'il y a :

$$A_{26}^3 = 26 \times 25 \times 24$$

mots de 3 lettres, mais pour 3 lettres données, par exemple a, b et e, il y a 3! mots distincts :

abe, aeb, bea, bae, eab, eba

Le nombre de mots de 3 lettres **sans prendre en compte l'ordre** est donc :

$$\frac{A_{26}^3}{3!}$$

que l'on note :

$$C_{26}^3$$

Une **combinaison** de p objets pris parmi $n \geq p$ est un **sous-ensemble** de p objets.
Le nombre de combinaisons de p objets parmi n est :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{(n-p)! p!}$$

▲ Faire l'exercice n° 11

4.2. Calculs de probabilités

On rappelle quelques résultats généraux ($\Pr(E)$ est la probabilité de l'événement E) :

Rappels

- $\Pr(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$ si tous les cas possibles sont équiprobables.
- $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$
- $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$ si A et B sont incompatibles.
- $\Pr(A | B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$ est la probabilité de A sachant B .
- $\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \times \Pr(B)$ si A et B sont indépendants.

Ces résultats se comprennent facilement si l'on se souvient que la probabilité d'un événement tend vers la fréquence d'apparition de cet événement en renouvelant indéfiniment l'expérience de tirage aléatoire.

Supposons que l'on réalise N expériences (avec $N \gg 1$ pour assimiler probabilité et fréquence), et notons $N(E)$ le nombre de fois où l'événement E est observé.

La probabilité conditionnelle $\Pr(A | B)$ est la fraction du nombre d'événements $A \cap B$ observés sur le nombre d'événements B observés :

$$\Pr(A | B) = \frac{N(A \cap B)}{N(B)} = \frac{\frac{N(A \cap B)}{N}}{\frac{N(B)}{N}} = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$$

Si A et B sont indépendants, alors le fait que B soit réalisé n'a pas d'influence sur la probabilité de A :

$$\Pr(A | B) = \Pr(A) \quad \Rightarrow \quad \Pr(A \cap B) = \Pr(A) \times \Pr(B)$$

On peut aussi exprimer cette relation en termes de fréquences :

$$\frac{N(A \cap B)}{N(B)} = \frac{N(A)}{N} \quad \Rightarrow \quad \frac{N(A \cap B)}{N} = \frac{N(A)}{N} \times \frac{N(B)}{N}$$

▲ Faire l'exercice n° 12

4.3. Variables aléatoires

4.3.1. Variables discrètes

Une plante peut produire 0, 1, 2, 3 ou 4 fleurs avec les probabilités suivantes :

Nombre de fleurs x	0	1	2	3	4
Probabilité $\Pr(X = x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Le nombre de fleurs est une variable aléatoire, que l'on note X , dont les valeurs possibles $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ sont dénombrables : on dit que X est une **variable aléatoire discrète**.

- La **loi de probabilité** de X est la fonction définie par :

$$x \mapsto \Pr(X = x)$$

- une variable aléatoire est **normalisée**, c'est-à-dire :

$$\sum_{\text{valeurs possibles } x_i} \Pr(X = x_i) = 1$$

- la **moyenne** (ou **espérance**) de X est :

$$\langle X \rangle = \sum_{x_i} x_i \times \Pr(X = x_i)$$

Il existe plusieurs notations pour la moyenne : $\langle X \rangle = E(X) = \bar{X}$

- l'**écart-type** σ de X , qui mesure la dispersion autour de la moyenne, est défini par :

$$\sigma = \sqrt{\langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle}$$

- la **variance** V est définie par :

$$V = \sigma^2$$

- la **fonction de répartition** F de X est définie par :

$$F(x) = \Pr(X < x)$$

Propriété

La variance vérifie :

$$V = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2$$

En effet :

$$V = \langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle = \langle X^2 + \langle X \rangle^2 - 2X\langle X \rangle \rangle = \langle X^2 \rangle + \langle X \rangle^2 - 2\langle X \rangle^2 = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2$$

Dans l'exemple précédent :

$$\langle X \rangle = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{8} + 2 \times \frac{1}{8} + 3 \times \frac{3}{8} + 4 \times \frac{1}{8} = 2$$

$$V = (0 - 2)^2 \times \frac{1}{4} + (1 - 2)^2 \times \frac{1}{8} + (2 - 2)^2 \times \frac{1}{8} + (3 - 2)^2 \times \frac{3}{8} + (4 - 2)^2 \times \frac{1}{8} = 2$$

$$\sigma = \sqrt{2}$$

L'écart-type a la même dimension physique que X . Ici, σ correspond à un nombre de fleurs, donc est sans unité.

La fonction de partition est donnée par le tableau suivant :

x (nombre de fleurs)	0	1	2	3	4	≥ 5
$F(x) = \Pr(X < x)$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{8}$	1

4.3.2. Variables continues

Considérons une particule radioactive existant à un instant pris comme origine des temps $t = 0$. Elle se désintègre de façon aléatoire à une date $t > 0$. La durée de vie X de la particule est une variable aléatoire continue car elle peut prendre une infinité non dénombrable de valeurs (voir TD pour son étude).

Fonction de répartition

La fonction de répartition de X est définie de la même façon que pour une variable aléatoire discrète :

$$F(x) = \Pr(X < x)$$

La probabilité que X soit dans l'intervalle $[a, b[$ est donc :

$$\Pr(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$$

Appliquons ce résultat à un intervalle élémentaire $[x, x + dx[$:

$$\Pr(x \leq X < x + dx) = F(x + dx) - F(x)$$

Soit :

$$\Pr(x \leq X < x + dx) = F'(x)dx$$

Densité de probabilité et normalisation

La densité de probabilité f de X est définie par $f(x) = F'(x)$ d'où :

$$\Pr(x \leq X < x + dx) = f(x)dx$$

La probabilité que la variable aléatoire prenne une valeur réelle quelconque est égale à 1 d'où :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Pr(x \leq X < x + dx) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Moyenne et variance

$$\begin{aligned}\langle X \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \Pr(x \leq X < x + dx) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx \\ V &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \langle X \rangle)^2 \cdot \Pr(x \leq X < x + dx) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \langle X \rangle)^2 f(x)dx\end{aligned}$$

Soient X et Y deux variables aléatoires, et a et b deux nombres réels.

$$\begin{aligned}\langle aX + bY \rangle &= a\langle X \rangle + b\langle Y \rangle \quad (\text{linéarité de la moyenne}) \\ V(aX) &= a^2 V(X)\end{aligned}$$

Si X et Y sont indépendantes, alors :

$$\begin{aligned}\langle XY \rangle &= \langle X \rangle \langle Y \rangle \\ V(X + Y) &= V(X) + V(Y)\end{aligned}$$

La dernière égalité s'écrit, en utilisant les écarts-types :

$$\sigma_{X+Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$$

On ajoute donc quadratiquement les écarts-types de variables aléatoires indépendantes. C'est un résultat important que l'on utilise fréquemment lorsqu'on traite les incertitudes de mesure.

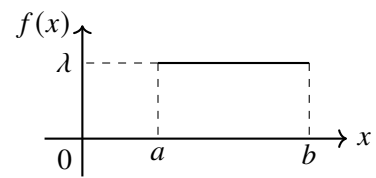
4.4. Exemples de lois de probabilité

On traite ici succinctement deux lois de probabilités. Il en existe évidemment bien d'autres (loi binomiale, hypergéométrique, de Poisson, exponentielle, ...) dont certaines seront vues en TD.

4.4.1. Loi uniforme

Soit une variable aléatoire X dont les valeurs x sont réparties de manière uniforme dans l'intervalle $[a, b]$. La densité de probabilité f est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [a, b] \\ \lambda & \text{sinon} \end{cases}$$



La normalisation de f permet de calculer la constante λ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \int_a^b \lambda dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{1}{b-a}$$

Vérifions par le calcul que $\langle X \rangle = \frac{1}{2}(a+b)$:

$$\langle X \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{a+b}{2}$$

Pour déterminer la variance, on peut revenir à sa définition :

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \langle X \rangle)^2 f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(x - \frac{1}{2}(a+b) \right)^2 dx$$

On peut alors effectuer le changement de variable :

$$u = x - \frac{1}{2}(a+b) \Rightarrow x = u + \frac{1}{2}(a+b)$$

Les bornes deviennent :

$$x = a \Rightarrow u = -\frac{b-a}{2}, \quad x = b \Rightarrow u = \frac{b-a}{2}$$

D'où :

$$V = \frac{1}{b-a} \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} u^2 du = \frac{1}{b-a} \left[\frac{u^3}{3} \right]_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{b-a}{2} \right)^3 = \frac{(b-a)^2}{12} = \left(\frac{b-a}{2\sqrt{3}} \right)^2$$

Donc, l'écart-type est :

$$\sigma = \sqrt{V} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

Écart-type d'une loi uniforme

L'écart-type d'une loi de distribution uniforme est égal à la demi-largeur de l'intervalle divisé par $\sqrt{3}$. On retiendra ce dernier résultat fréquemment utilisé lorsqu'on traite les incertitudes de mesures.

4.5. Loi normale et loi normale centrée réduite

Loi normale

Une variable aléatoire continue X suit une **loi normale** de moyenne m et d'écart-type σ si sa densité de probabilité s'écrit :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Cette fonction est **symétrique** par rapport à $x = m$, donc on a bien :

$$\langle X \rangle = m$$

Par ailleurs, on montre que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 f(x) dx = \sigma^2$$

donc σ est bien l'**écart-type** de X .

Le tableau ci-dessous montre notamment que **95% des valeurs de X** sont réparties dans un intervalle centré sur m et de demi-largeur égale à 2σ :

Intervalle	$m - \sigma < X < m + \sigma$	$m - 2\sigma < X < m + 2\sigma$	$m - 3\sigma < X < m + 3\sigma$	$m - 4\sigma < X < m + 4\sigma$
Probabilité	0,68	0,95	0,997	0,99994

Loi normale centrée réduite

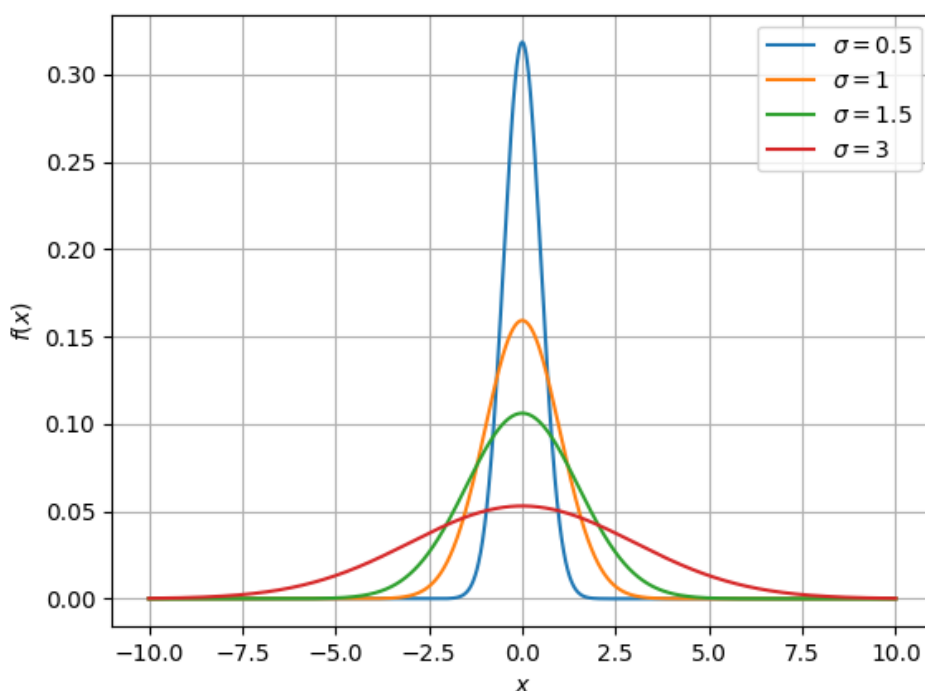
Définissons une nouvelle variable aléatoire :

$$Y = \frac{X - m}{\sigma}$$

On montre que Y suit une loi normale de moyenne nulle et d'écart-type 1 : on dit que Y suit une **loi normale centrée réduite**. Sa densité de probabilité s'écrit :

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

On trace ci-dessous les courbes de $f(x)$ pour $m = 0$ et pour 4 valeurs différentes d'écart-type σ .



4.6. Théorème central limite

Énoncé du théorème

Soient $X_1, X_2, \dots, X_N$ une suite de N variables aléatoires indépendantes et de même loi de probabilité. Alors, la loi de probabilité de la variable aléatoire :

$$S = X_1 + X_2 + \dots + X_N$$

converge, lorsque $N \rightarrow \infty$, vers une loi normale.

Moyenne et variance de S

Notons m et σ la moyenne et l'écart-type communs aux X_i .

$$\langle S \rangle = \sum_{i=1}^N \langle X_i \rangle = Nm$$

Les X_i sont indépendantes donc :

$$V(S) = \sum_{i=1}^N V(X_i) = N\sigma^2$$

Moyenne arithmétique

Soit Y la variable aléatoire égale à la moyenne arithmétique des X_i :

$$Y = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_N}{N} = \frac{S}{N}$$

Alors la loi de probabilité de Y tend vers une loi normale de moyenne m et d'écart-type $\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$.

En effet :

$$Y = \sum_{i=1}^N Y_i \quad \text{où} \quad Y_i = \frac{X_i}{N}$$

Les variables aléatoires Y_i sont indépendantes et de même loi de probabilité, donc la loi de Y tend vers une loi normale d'après le **théorème central limite**.

De plus :

$$\begin{aligned} \langle Y \rangle &= \frac{\langle S \rangle}{N} = m \\ V(Y) &= \frac{1}{N^2} V(S) = \frac{\sigma^2}{N} \end{aligned}$$

Ce résultat est important pour calculer les incertitudes de mesure de type A en physique-chimie : lorsqu'on répète une mesure dans les mêmes conditions un grand nombre de fois N alors la **moyenne arithmétique** des résultats tend vers une loi normale d'écart-type :

$$\sigma_Y = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

où σ est l'écart-type des résultats d'une mesure.

▲ Faire les exercices n° 13, 14