Feuille d'exercices 20
ÉLÉMENTS DE CORRECTION

Exercice 1.

(d) $M_{\beta_0}^{\beta_0}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

(e) $M_{\beta_0}^{\beta_0}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. Notons $A = M_{\beta_0}^{\beta_0}(f)$ et $B = M_{\beta_0}^{\beta_0}(g)$. Alors :

- $M_{\beta_0}^{\beta_0}(f+g) = A + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$,
- $M_{\beta_0}^{\beta_0}(f \circ g) = AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & 11 & 20 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$,
- $M_{\beta_0}^{\beta_0}(g \circ f) = BA = \begin{pmatrix} -3 & 9 & 10 \\ -2 & 5 & 6 \\ -5 & 14 & 16 \end{pmatrix}$,
- $M_{\beta_0}^{\beta_0}(f^{-1}) = A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$,
- Comme B n'est pas inversible, $M_{\beta_0}^{\beta_0}(g^{-1})$ n'existe pas.

Exercice 3.

(b) $M_{\beta_0}^{\beta_0}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Par méthode du pivot, cette matrice est inversible, donc f est un isomorphisme, d'inverse $M_{\beta_0}^{\beta_0}(f^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) $M_{\beta_0}^{\beta_0}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, donc $M_{\beta_0}^{\beta_0}(f^{-1}) = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(d) $M_{\beta_0}^{\beta_0}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Par méthode du pivot, cette matrice est inversible, donc f est un isomorphisme, d'inverse $M_{\beta_0}^{\beta_0}(f^{-1}) = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4. Notons $M = M_{\beta_0}(\beta') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Comme $\det(M) = 1 \neq 0$, β' est une base de $\mathbb{R}^4$.

De plus, $P_{\beta'}^{\beta_0} = M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc :

$M_{\beta'}(u) = P_{\beta'}^{\beta_0} M_{\beta_0}(u) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 8.

- Notons $A = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix}$. Comme $C_2 = 2C_1 \neq 0$, A est de rang 1,
- On applique la méthode du pivot : $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc B est de rang 2,
- Notons $C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix}$. On a $C_1 + 2C_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} C_3$, donc C est de rang 2.
- On applique la méthode du pivot :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & c & 2 \\ 2 & c & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & c+1 & 1 \\ 0 & 0 & -(c+2)(c-3) & -(c-3) \end{pmatrix},$$

  donc : si $c \neq 3$, la matrice D est de rang 3 ; si $c = 3$, D est de rang 2.

Exercice 9.

(a) On a $\det\left(M_{\beta_0}(\beta)\right) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -16 \neq 0$, donc β est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) On a $M_{\beta_0}(f(u_3) + 5u_2) = A \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$, donc $f(u_3) + 5u_2 = (6, 3, -3) = 3u_1$.

De la même façon, $f(u_1) = (0, 0, 0)$ et $f(u_2) = 4u_1$, d'où :

$$M_\beta^\beta(f) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Comme $M_\beta^\beta(f)$ a deux pivots, l'application f est de rang 2. D'après le théorème du rang, le noyau de f est donc de dimension 1 ; d'après la forme de $M_\beta^\beta(f)$, on a donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(u_1)$. Enfin, $M_\beta^\beta(f)^3 = 0_3$, donc f^3 est l'application nulle.

On peut donc lire directement dans la matrice $M_\beta^\beta(f)$ plusieurs propriétés de l'application f : la base β est donc particulièrement *adaptée à* f.

Exercice 10. Notons F le plan d'équation $x+y-z=0$, G la droite $\mathrm{Vect}((1,1,1))$ et $f = p_{F//G}$.
Une base de F est $((1,0,1),(0,1,1))$, et une base de G est bien sûr $((1,1,1))$.
Notons $u_1 = (1,0,1)$, $u_2 = (0,1,1)$ et $u_3 = (1,1,1)$, puis $\beta = (u_1,u_2,u_3)$.
Par définition de f, on a $M_\beta^\beta(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. De plus, $P_{\beta_0}^\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, d'où $P_\beta^{\beta_0} = \left(P_{\beta_0}^\beta\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
Donc :

$$M_{\beta_0}^{\beta_0}(f) = P_{\beta_0}^\beta M_\beta^\beta(f) P_\beta^{\beta_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11. Le noyau de f (obtenu en résolvant $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0_{3,1}$) est le plan d'équation $x+y-z=0$.
De plus, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(u)$, où $u = (1,-3,-2) \in \mathrm{Ker}(f)$.
Il suffit alors de prendre pour base β de $\mathbb{R}^3$ une base de $\mathrm{Ker}(f)$ contenant u, complétée avec un vecteur $v \notin \mathrm{Ker}(f)$. Par exemple, $\beta = (u,(1,0,1),e_3)$. On a alors :

$$M_\beta^\beta(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12. Comme $S^2 = I_3$, S est la matrice d'une symétrie. Notons $s_{F//G}$ la symétrie de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associée à S et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, alors : $SX = X \Leftrightarrow x+y+z=0$, donc $F = \mathrm{Vect}((1,0,-1),(0,1,-1))$, et $SX = -X \Leftrightarrow x = -y = 3z$, donc $G = \mathrm{Vect}((3,-3,1))$.

Exercice 13.

(d) -1

(e) 26

(f) 12

(g) -2

(h) $2abc$

(i) λ^3+1

Exercice 14.

(c) $4+4i$

(d) $(a-1)^3a^3$

(e) $\lambda^4 - 5\lambda^2 + 4$

(f) $(a-c)^2(a^2+2ac-4b^2+c^2)$

Exercice 16.

(a) $|A_n| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \end{vmatrix} \underset{\forall i\geq 2,\ L_i \leftarrow L_i - L_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \end{vmatrix} = |A_{n-1}|$, donc par récurrence : $|A_n| = |A_1| = 1$.

(b) $|A_n| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & \cdots & n-4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \underset{\forall i\geq 2,\ L_i \leftarrow L_i - L_{i-1}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 \end{vmatrix}$

$\underset{\forall i\leq n-1,\ L_i \leftarrow L_i - L_n}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 \\ -2 & -2 & -2 & \cdots & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & \cdots & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \cdots & -2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & 0 \end{vmatrix}$

$= (-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$.

Exercice 18. On a directement :

$$\det(A) = \det(A^\intercal) = \det(-A) = (-1)^{2p+1}\det(A) = -\det(A),$$

donc $\det(A) = 0$.

Exercice 19.

(b) $|M_{\beta_0}(u_1, u_2)| = \begin{vmatrix} \lambda+3 & 2\lambda+3 \\ 3\lambda+1 & 5\lambda+4 \end{vmatrix} = -(\lambda+1)(\lambda-9)$,
donc (u_1, u_2) est une base de E si et seulement si $\lambda \neq -1, 9$.

(c) $|M_{\beta_0}(P_1, P_2, P_3)| = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -49 \neq 0$, donc (P_1, P_2, P_3) est une base de E.

(d) $|M_{\beta_0}(P_1, P_2, P_3)| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, donc (P_1, P_2, P_3) est une base de E.

(e) $|M_{\beta_0}(P_1, P_2, P_3)| = \begin{vmatrix} \alpha\beta & \alpha\gamma & \beta\gamma \\ -\alpha-\beta & -\alpha-\gamma & -\beta-\gamma \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)$,
donc (P_1, P_2, P_3) est une base de E si et seulement si α, β, γ sont distincts deux à deux.

Exercice 20. Notons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda) = \det(A + \lambda B)$.
Comme $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $f(0) = \det(A) \neq 0$. De plus, par construction du déterminant, f est une fonction polynomiale, donc continue sur $\mathbb{R}$.
On note alors $\varepsilon = \dfrac{|\det(A)|}{2}$. Par continuité de f, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad |\lambda| < \delta \Rightarrow |f(\lambda) - f(0)| \leq \varepsilon,$$

c'est-à-dire $\frac{1}{2}\det(A) \leq f(\lambda) \leq \frac{3}{2}\det(A)$ si $\det(A) > 0$, $-\frac{3}{2}\det(A) \leq f(\lambda) \leq -\frac{1}{2}\det(A)$ si $\det(A) < 0$; et donc dans tous les cas $f(\lambda) \neq 0$, soit $A + \lambda B \in GL_n(\mathbb{R})$.

Exercice 21. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos a & \cos b & \cos c \\ \cos^2 a & \cos^2 b & \cos^2 c \end{vmatrix} = -(\cos a - \cos b)(\cos a - \cos c)(\cos b - \cos c)$, donc la famille est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $\cos a,\ \cos b,\ \cos c$ sont distincts deux à deux, c'est-à-dire si $a \neq \pm b (2\pi)$, et de même pour a et c et pour b et c.

Exercice 22.

(a) $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 4 & 42 \\ 10 & 20 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 13 & 42 \\ 7 & 20 \end{vmatrix}} = 10$, $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 13 & 4 \\ 7 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 13 & 42 \\ 7 & 20 \end{vmatrix}} = -3$.

(b) $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 7 & -6 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \end{vmatrix}} = 5$, $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \end{vmatrix}} = 1$, $z = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & -6 & 7 \\ 1 & 2 & 5 \\ -2 & 5 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \end{vmatrix}} = -2$.

(c) Comme $\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda+2)$, le système est de Cramer si et seulement si $\lambda \neq 1, -2$.

Dans ce cas, d'après les formules de Cramer :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda x + y + z & = & 1 \\ x + \lambda y + z & = & \lambda \\ x + y + \lambda z & = & \lambda^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & \lambda & 1 \\ \lambda^2 & 1 & \lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}} = \dfrac{-(\lambda-1)^2(\lambda+1)}{(\lambda-1)^2(\lambda+2)} = -\dfrac{\lambda+1}{\lambda+2} \\ y & = & \dfrac{\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda^2 & \lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}} = \dfrac{(\lambda-1)^2}{(\lambda-1)^2(\lambda+2)} = \dfrac{1}{\lambda+2} \\ z & = & \dfrac{\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}} = \dfrac{(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2}{(\lambda-1)^2(\lambda+2)} = \dfrac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2} \end{array}\right. .$$

Si $\lambda = 1$, le système est équivalent à $x + y + z = 1$, dont l'ensemble des solutions est un plan de $\mathbb{R}^3$.
Si $\lambda = -2$, le système est incompatible (le vérifier !), donc son ensemble des solutions est vide.

Exercice 23. Notons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors : $M_{\beta_0}^{\beta_0}(f) = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}$, donc :

$$\det(f) = \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{vmatrix} = (ad - bc)^2 = (\det A)^2.$$

Exercice 24. Notons $\beta_0 = (E_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$.
La matrice $M_{\beta_0}^{\beta_0}(\varphi)$ est alors la matrice identité I_{n^2} à laquelle ont été appliquées les permutations $L_{ij} \leftrightarrow L_{ji}$ pour tout $1 \leq i < j \leq n$, soit $\dfrac{n(n-1)}{2}$ permutations. Donc :

$$\det(\varphi) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Exercice 25. Soit P dans $\mathbb{R}_2[X]$, puis $T \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $T' = P$. Alors : $\varphi(P) = T(X+1) - T(X) \in \mathbb{R}_2[X]$, donc φ est bien définie.
On a alors : $M_{\beta_0}^{\beta_0}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc $\det(\varphi) = 1 \times 1 \times 1 = 1$.

Exercice 26. Soient F et G les espaces caractéristiques du projecteur p, et soit β une base de E adaptée à la décomposition $F \oplus G$. Alors :

$$M_\beta^\beta(p) = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix},$$

donc $\det(p) = 1^r \times 0^{n-r} = 1$ si $r = n$ (c'est-à-dire $p = \mathrm{Id}_E$), 0 sinon.
De même,

$$M_\beta^\beta(s) = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & -I_{n-r} \end{pmatrix},$$

donc $\det(s) = 1^r \times (-1)^{n-r} = (-1)^{n-r}$.