

## Feuille d'exercices 18

### ÉLÉMENTS DE CORRECTION

**Exercice 1.**

(d) Notons  $D$  l'événement « Un seul dé donne 6, ou les deux donnent 3 », alors :

$$D = \{\omega_{k,6}, \omega_{6,k} \mid k \in \llbracket 1, 5 \rrbracket\} \cup \{\omega_{3,3}\},$$

donc  $\text{Card}(D) = 11$ , et donc  $\mathbb{P}(D) = \frac{\text{Card}(D)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{11}{36}$ .

(e) Notons  $E$  l'événement « La somme des résultats vaut 4 », alors :

$$E = \{\omega_{1,3}, \omega_{2,2}, \omega_{3,1}\},$$

donc  $\text{Card}(E) = 3$ , et donc  $\mathbb{P}(E) = \frac{\text{Card}(E)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ .

(f) Notons  $F$  l'événement « Les deux chiffres sont de parités opposées », alors :

$$F = \{\omega_{i,j} \mid (i, j) \in \{1, 3, 5\} \times \{2, 4, 6\} \cup \{2, 4, 6\} \times \{1, 3, 5\}\},$$

donc  $\text{Card}(F) = 18$ , et donc  $\mathbb{P}(F) = \frac{\text{Card}(F)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$ .

**Exercice 2.** Notons  $\Omega$  l'univers, c'est un ensemble de cardinal  $\binom{20}{4} = 4845$ .

(a) Notons  $A$  l'événement « On obtient deux paires de chaussures ». Il y a 2 parmi 10 choix, donc  $\text{Card}(A) = \binom{10}{2} = 45$ , donc  $\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{10}{2}}{\binom{20}{4}} = \frac{3}{323} \simeq 0,01$ .

(b) Notons  $B$  l'événement « On obtient au moins une paire de chaussures ». Il y a 1 parmi 10 choix pour cette paire et 2 parmi 18 choix pour les deux autres chaussures tirées, donc  $\text{Card}(B) = \binom{10}{1} \times \binom{18}{2} = 1530$ , donc  $\mathbb{P}(B) = \frac{\binom{10}{1} \times \binom{18}{2}}{\binom{20}{4}} = \frac{6}{19} \simeq 0,32$ .

(c) Notons  $C$  l'événement « On obtient une et une seule paire de chaussures ». Alors  $C = B \setminus A$ , donc  $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A) \simeq 0,31$ .

**Exercice 5.** On note, pour  $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$ ,  $B_i$  l'événement « on tire une boule au  $i^{\text{ème}}$  tirage », et de même  $N_i$ .

(a) Notons  $A$  l'événement « on tire au moins une boule noire ». Alors  $\bar{A}$  est l'événement « on tire trois boules blanches », donc :

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3).$$

Or, d'après la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \times \mathbb{P}_{B_1 \cap B_2}(B_3) = \frac{8}{10} \times \frac{7}{9} \times \frac{6}{8} = \frac{7}{15},$$

donc  $\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}$ .

(b) On cherche  $\mathbb{P}_A(N_1)$ . D'après la définition d'une probabilité conditionnelle :

$$\mathbb{P}_A(N_1) = \frac{\mathbb{P}(A \cap N_1)}{\mathbb{P}(A)}.$$

$$\text{Or } A \cap N_1 = N_1, \text{ donc } \mathbb{P}_A(N_1) = \frac{\mathbb{P}(N_1)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{8}{15}} = \frac{3}{8}.$$

**Exercice 9.** Notons  $C$  l'événement « L'accusé est coupable »,  $D_1$  l'événement « Le juré 1 déclare l'accusé coupable » et de même pour  $D_2$ .

On connaît  $\mathbb{P}(C) = 0,6$ ,  $\mathbb{P}_C(D_1) = \mathbb{P}_C(D_2) = 0,7$  et  $\mathbb{P}_{\bar{C}}(D_1) = \mathbb{P}_{\bar{C}}(D_2) = 0,2$ .

On cherche  $\mathbb{P}_{D_1 \cap D_2}(\bar{C})$ . D'après la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}_{D_1 \cap D_2}(\bar{C}) = \mathbb{P}_{\bar{C}}(D_1 \cap D_2) \times \frac{P(\bar{C})}{\mathbb{P}(D_1 \cap D_2)},$$

où, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(D_1 \cap D_2) &= P(C \cap D_1 \cap D_2) + P(\bar{C} \cap D_1 \cap D_2) \\ &= \mathbb{P}(C) \times P_C(D_1 \cap D_2) + \mathbb{P}(\bar{C}) \times P_{\bar{C}}(D_1 \cap D_2) \\ &= 0,6 \times 0,7^2 + 0,4 \times 0,2^2 \\ &= 0,31, \end{aligned}$$

donc :

$$\mathbb{P}_{D_1 \cap D_2}(\bar{C}) = 0,2^2 \times \frac{0,4}{0,31} \simeq 0,052.$$

Le risque d'erreur judiciaire est donc d'environ 5,2% dans cette configuration.

**Exercice 10.** On note  $A$  l'événement « le client a un accident ». On connaît  $\mathbb{P}(R_1) = 0,2$ ,  $\mathbb{P}(R_2) = 0,5$ ,  $\mathbb{P}(R_3) = 0,3$ ; et  $\mathbb{P}_{R_1}(A) = 0,05$ ,  $\mathbb{P}_{R_2}(A) = 0,15$ ,  $\mathbb{P}_{R_3}(A) = 0,3$ .

(a) On cherche  $\mathbb{P}(A)$ . D'après la formule des probabilités totales :  $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}_{R_1}(A) + \mathbb{P}(R_2)\mathbb{P}_{R_2}(A) + \mathbb{P}(R_3)\mathbb{P}_{R_3}(A) = 0,175$ .

(b) On cherche  $\mathbb{P}_{\bar{A}}(R_1)$ . D'après la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}_{\bar{A}}(R_1) = \mathbb{P}_{R_1}(\bar{A}) \frac{\mathbb{P}(R_1)}{\mathbb{P}(\bar{A})} = (1 - \mathbb{P}_{R_1}(A)) \frac{\mathbb{P}(R_1)}{1 - \mathbb{P}(A)} \simeq 0,23.$$

**Exercice 11.** Notons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $D_n$  l'événement « Les descendants d'un individu disparaissent en  $n$  générations », de probabilité  $p_n$ ; et, pour  $k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$ ,  $E_k$  l'événement « Un individu a  $k$  enfants ».

On connaît  $p_0 = \mathbb{P}(D_0) = 0$ , et, en supposant chaque individu indépendant :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad p_{n+1} &= \mathbb{P}(E_0) \times p_n^0 + \mathbb{P}(E_1) \times p_n^1 + \mathbb{P}(E_2) \times p_n^2 + \mathbb{P}(E_3) \times p_n^3 \\ &= \frac{1}{8} (p_n^3 + 3p_n^2 + 3p_n + 1) \\ &= \left( \frac{p_n + 1}{2} \right)^3, \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en notant  $f : x \mapsto \left( \frac{x+1}{2} \right)^3 : \begin{cases} p_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, p_{n+1} = f(p_n) \end{cases}$ . Pour  $x \in [0, 1]$  :

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow (x+1)^3 = 8x \\ &\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 5x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 4x - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } -2 \pm \sqrt{4+1} \\ &\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } \sqrt{5} - 2. \end{aligned}$$

L'intervalle  $[0, \sqrt{5} - 2]$  est alors stable par  $f$ , et sur cet intervalle :  $f(x) - x \geq 0$ . La suite  $(p_n)$  est donc croissante, de limite  $\sqrt{5} - 2 \simeq 0,236$ . L'espèce a donc environ 23,6% de risque de disparaître.

**Exercice 14.** Notons, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $P_k$  l'événement « on obtient pile au  $k^{\text{ème}}$  lancer ». On cherche  $\mathbb{P}(\overline{P_1} \cap \overline{P_2} \cap \dots \cap \overline{P_{n-1}} \cap P_n)$ . Les lancers étant supposés indépendants, on a :

$$\mathbb{P}(\overline{P_1} \cap \overline{P_2} \cap \dots \cap \overline{P_{n-1}} \cap P_n) = \mathbb{P}(\overline{P_1}) \times \mathbb{P}(\overline{P_2}) \times \dots \times \mathbb{P}(P_n) = \frac{2}{3^n}.$$

**Exercice 16.** Notons  $A$  l'événement « au moins 2 élèves ont le même anniversaire ». Alors  $\overline{A}$  est l'événement « tous les anniversaires sont différents ». Comme les anniversaires sont indépendants, on a :

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \dots \times \frac{365 - 45 + 1}{365} = \frac{365!}{325!365^{45}} \simeq 0.06.$$

Donc  $\mathbb{P}(A) \simeq 0.94$ .

*Cette probabilité dépasse 50% dès que la classe compte 23 élèves! C'est le paradoxe des anniversaires.*

**Exercice 17.** On note  $A$  l'événement « on a obtenu au moins un 6 en  $n$  lancers ». Alors  $\overline{A}$  est l'événement « on n'a obtenu aucun 6 en  $n$  lancers ». Comme les lancers sont indépendants, on a :  $\mathbb{P}(\overline{A}) = \left(\frac{5}{6}\right)^n$ , donc

$\mathbb{P}(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$ . Alors :

$$\mathbb{P}(A) \geq 0,5 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0,5 \Leftrightarrow n \leq \frac{\ln(0,5)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} \simeq 3,8.$$

4 lancers sont donc nécessaires.

De même, pour deux lancers :  $\mathbb{P}(A) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n$ , donc 25 lancers sont nécessaires.

*Avec  $n$  dés, on peut calculer que le nombre de lancers recherchés est équivalent à  $6^n \ln(2)$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .*

**Exercice 18.**

(a) La probabilité est uniforme, et  $M_d$  est de cardinal  $\frac{n}{d}$ , donc  $\mathbb{P}(M_d) = \frac{\frac{n}{d}}{n} = \frac{1}{d}$ .

(b) Le numéro du jeton est premier avec  $n$  si et seulement s'il n'est divisible par aucun des  $p_k$ , d'où la formule.

(c) D'une part,  $\mathbb{P}(a) = \frac{\varphi(n)}{n}$ . D'autre part, comme les événements  $M_{p_k}$  sont mutuellement indépendants (à vérifier!), on a :

$$\mathbb{P}(A) = \prod_{k=1}^r \mathbb{P}(\overline{M_{p_k}}) = \prod_{k=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

$$\text{Donc : } \varphi(n) = n \prod_{k=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) = \prod_{k=1}^r (p_k - 1) p_k^{\alpha_k - 1}.$$