Devoir à la maison n° 12

Exercice 1. Alice et Bob jouent aux dés. À tour de rôle, en commençant par Alice, chacun lance deux dés. Alice gagne si la somme des dés donne 6 et Bob gagne si la somme des dés donne 7. Dès qu'un des joueurs gagne, le jeu s'arrête ; tant qu'aucun des joueurs n'a gagné, le jeu continue. On suppose que les dés ne sont pas truqués.

1. Calculer la probabilité pour qu'Alice gagne dès son premier lancer. On notera A_1 cet événement.
2. Calculer la probabilité pour qu'Alice ne gagne pas à son premier lancer et que Bob gagne dès son premier lancer. On notera B_1 cet événement.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité pour qu'Alice gagne à son $n^{\text{ème}}$ lancer.
4. En déduire la probabilité a_n pour qu'Alice gagne en n lancers ou moins.
5. Calculer la probabilité b_n pour que Bob gagne en n lancers ou moins.
6. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$. Qui a le plus de chances de gagner ?

Exercice 2.

1. On pose :
$$F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y = y-t = 0\right\}.$$
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, déterminer une base et la dimension de F.
2. On pose $e_1 = (0,0,1,2)$, $e_2 = (5,0,-3,-1)$ et $e_3 = (2,0,-1,0)$. La famille (e_1,e_2,e_3) est-elle libre ?
3. On pose $u = (1,0,0,1)$, $v = (-1,0,1,1)$ et $G = \mathrm{Vect}(u,v)$. Déterminer une base et la dimension de G.
4. Montrer que $G = \mathrm{Vect}(e_1,e_2,e_3)$.
5. Montrer que $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$.