PCSI, Bellevue, 2025-2026
Devoir surveillé n°8 : concours blanc

L'usage de la calculatrice est interdit. Les calculs qui vous sont nécessaires doivent être faits sur la copie.
La copie doit être convenablement présentée. L'écriture, l'orthographe et la rédaction doivent être soignées. Aucune abréviation n'est autorisée dans la copie. Les copies doivent être numérotées, rangées dans le bon ordre et les titres des exercices doivent être mis en évidence.
Chaque question doit être traitée avec un souci de rigueur et de clarté. Sauf mention explicite, les réponses doivent être justifiées. Les résultats essentiels peuvent être encadrés ou soulignés. Il ne faut pas oublier que c'est la conclusion explicite d'un raisonnement qui doit achever la réponse à une question.

Ce sujet est composé de quatre problèmes indépendants, **qui devront impérativement être rendus sur quatre copies séparées**. Si un problème devait ne pas être traité, il est quand même demandé de rendre une copie blanche.

Problème 1 : Produits infinis

Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle à termes non nuls, c'est-à-dire telle que $\forall\, k\in\mathbb{N},\ u_k\neq 0$. On considère la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\quad p_n=\prod_{k=0}^{n} u_k$$

Définition : On dit que le "produit infini" noté $\prod\limits_{k\geq 0} u_k$ converge si et seulement si la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers une limite finie **non nulle**. Sinon, on dit que le produit infini $\prod\limits_{k\geq 0} u_k$ diverge.

Une condition nécessaire pour la convergence d'un produit

1) On suppose que le produit infini $\prod\limits_{k\geq 0} u_k$ converge, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda\in\mathbb{R}^*$ tel que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers λ.
a) Démontrer que la suite $(p_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend également vers λ.
b) En déduire que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 1.
c) En déduire que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est à termes strictement positifs à partir d'un certain rang.

2) On suppose pour cette question que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}=\left(1+\dfrac{1}{k+1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$.
a) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, déterminer une expression simplifiée de p_n.
b) En déduire la nature du produit infini $\prod\limits_{k\geq 0} u_k$, c'est-à-dire déterminer s'il converge ou s'il diverge.

3) Soit $a\in\mathbb{R}$ tel que $\forall\,\lambda\in\mathbb{Z}, a\neq\dfrac{\lambda\pi}{2}$. On suppose pour cette question que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}=\left(\cos\left(\dfrac{a}{2^k}\right)\right)_{k\in\mathbb{N}}$.
a) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, calculer $p_n\times\sin\left(\dfrac{a}{2^n}\right)$ en fonction de p_{n-1} et de $\sin\left(\dfrac{a}{2^{n-1}}\right)$.
b) Déterminer une expression simplifiée de p_n.
c) Déterminer la nature du produit infini $\prod\limits_{k\geq 0} u_k$.

4) Est-il suffisant que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tende vers 1 pour que le produit infini $\prod\limits_{k\geq 0} u_k$ converge ?

Un critère de convergence d'un produit

On suppose dans cette partie que tous les termes de la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont strictement positifs, c'est-à-dire que $\forall k\in\mathbb{N},\ u_k>0$.

On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad S_n=\sum_{k=0}^{n}\ln(u_k).$$

5) Montrer que le produit infini $\prod\limits_{k\geq 0} u_k$ converge si et seulement si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

6) On suppose dans cette question que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}=\left((k+1)^{\frac{1}{k+1}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$.
a) Déterminer les variations strictes de la fonction $x\mapsto\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$ sur son domaine de définition.
b) Justifier que, pour tout $k\in\mathbb{N}$ tel que $k\geq 2$, on a :

$$\int_k^{k+1}\frac{\ln(x+1)}{x+1}dx\leq\frac{\ln(k+1)}{k+1}.$$

c) En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par une suite qui tend vers $+\infty$.
d) Quelle est la nature du produit infini $\prod\limits_{k\geq 0} u_k$?

La fonction cotangente

On introduit la fonction

$$\cot : x \mapsto \frac{1}{\tan(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

1)a) Déterminer le domaine de définition de la fonction cot. On le notera D.
1)b) Démontrer que la fonction cot est π-périodique.
1)c) Faire une brève étude de la fonction cot sur un intervalle de longueur π (au choix) de son domaine de définition.
1)d) Démontrer que $\forall x \in D$, $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ est bien défini et $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot(x)$.
1)e) Calculer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de $\frac{\pi}{2}$ de la fonction cot.
1)f) Tracer une représentation graphique de la fonction cot.

Soit $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
2)a) Justifier que $\frac{1+\cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)}$ est bien défini et l'exprimer en fonction de $\tan(\alpha)$.
2)b) Démontrer que $0 < \frac{1+\cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)} \leq \frac{1}{\alpha}$.

Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $t \not\equiv 0 \mod 2\pi$.
3)a) Démontrer que $\left|\frac{1}{1-e^{it}}\right| = \frac{1}{2|\sin(\frac{t}{2})|}$ et trouver deux nombres complexes z et w tels que $\frac{1}{1-e^{it}} = z + w\cot\left(\frac{t}{2}\right)$.
3)b) Démontrer que $\left|1 - \frac{1}{1-e^{it}}\right| = \left|\frac{1}{1-e^{it}}\right|$.

Inégalité discrète de Kusmin-Landau

Soit $\theta \in]0, \pi[$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ une famille de n nombres réels tels que

$$\theta \leq x_2 - x_1 \leq x_3 - x_2 \leq \ldots \leq x_n - x_{n-1} \leq 2\pi - \theta$$

Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on pose :
- $y_k = x_{k+1} - x_k$ (et par conséquent $\theta \leq y_1 \leq y_2 \leq \ldots \leq y_{n-1} \leq 2\pi - \theta$)
- $c_k = \frac{1}{1-e^{iy_k}}$ (qui est bien défini car $\theta \in]0, \pi[$ donc $-\theta < 0$ donc $0 < \theta < y_k \leq 2\pi - \theta < 2\pi$)

4) Démontrer que $\forall i, j \in [\![1, n-1]\!]$ tels que $i < j$, $\cot\left(\frac{y_i}{2}\right) - \cot\left(\frac{y_j}{2}\right) \leq 2\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

5) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.
a) Démontrer que $c_{k+1} - c_k$ est imaginaire pur. Déterminer le signe de sa partie imaginaire, et en déduire une simplification de $|c_{k+1} - c_k|$.
b) Démontrer que $|c_k| \leq \frac{1}{2\sin(\frac{\theta}{2})}$.
c) Exprimer $e^{ix_k} - e^{ix_{k+1}}$ en fonction de c_k et e^{ix_k}.

6)a) Déterminer $\gamma \in \mathbb{C}$ tel que $\sum_{k=1}^{n} e^{ix_k} = \sum_{k=1}^{n-1} c_k(e^{ix_k} - e^{ix_{k+1}}) + \gamma$.
6)b) Démontrer que $\sum_{k=1}^{n} e^{ix_k} = c_1 e^{ix_1} + \sum_{k=2}^{n-1}(c_k - c_{k-1})e^{ix_k} + (1 - c_{n-1})e^{ix_n}$.
7)a) En déduire que $|\sum_{k=1}^{n} e^{ix_k}| \leq \frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} + \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$.
7)b) Puis obtenir l'inégalité discrète de Kusmin-Landau suivante : $|\sum_{k=1}^{n} e^{ix_k}| \leq \frac{4}{\theta}$.

Problème 3 : Polynômes d'interpolation de Lagrange

On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes en l'indéterminée X à coefficients réels et pour tout $d \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_d[X]$ le sous-ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à d. On munit ces ensembles de leurs structures usuelles de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. On considère l'application de multi-évaluations suivante :

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}^n \\ P(X) & \mapsto & (P(x_1), \ldots, P(x_n)) \end{array}$$

1)a) Démontrer que l'application Φ est linéaire.
1)b) Démontrer que si Φ est surjective alors $x_1, \ldots, x_n$ sont deux à deux distincts.

On suppose désormais que $x_1, \ldots, x_n$ sont deux à deux distincts.

On considère le polynôme

$$\omega(X) = \prod_{1 \leq k \leq n} (X - x_k).$$

Par exemple, si $n = 3$, on a $\omega(X) = (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)$.

On pose

$$F = \{\omega(X)Q(X) \text{ avec } Q(X) \in \mathbb{R}[X]\}$$

2)a) Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
2)b) Démontrer que F et $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$.

3) A l'aide de ce qui a déjà été introduit, déterminer le noyau de Φ.

On notera désormais f la restriction de Φ à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ c'est-à-dire :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{n-1}[X] & \to & \mathbb{R}^n \\ P(X) & \mapsto & (P(x_1), \ldots, P(x_n)) \end{array}$$

4) Démontrer que cette restriction f est injective.

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on considère le polynôme

$$\omega_i(X) = \prod_{1 \leq k \leq n \ | \ k \neq i} (X - x_k)$$

Par exemple, si $n = 3$, on a $\omega_1(X) = (X - x_2)(X - x_3)$, $\omega_2(X) = (X - x_1)(X - x_3)$, $\omega_3(X) = (X - x_1)(X - x_2)$.

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose :

$$L_i(X) = \frac{1}{\omega_i(x_i)} \omega_i(X)$$

qui est bien défini car les nombres $x_1, \ldots, x_n$ sont deux à deux distincts.

5) Pour cette question, on prend $n = 3$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$. Déterminer dans ce cas particulier les polynômes $L_1(X)$, $L_2(X)$, $L_3(X)$ correspondants. On les écrira sous forme développée.

6)a) Déterminer, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, le degré du polynôme $L_i(X)$.
6)b) Calculer, pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, l'évaluation $L_i(x_j)$.

On pose $\mathcal{L} = (L_1(X), \ldots, L_n(X))$. Les polynômes de cette famille sont appelés les polynômes de Lagrange.

7) Démontrer que la famille $\mathcal{L}$ est libre.

8)a) Calculer, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $f(L_i)$.
8)b) Démontrer que f est surjective.

9) Déterminer l'unique polynôme $P(X) \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(-1) = 6$, $P(0) = 0$, $P(2) = 3$. On l'écrira sous forme développée. Ce polynôme est appelé un polynôme d'interpolation de Lagrange.

10)a) Démontrer que pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$, le monôme X^j se décompose comme une combinaison linéaire des polynômes de la famille $\mathcal{L}$.
10)b) En déduire que $\mathcal{L}$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

<u>Problème 4 : Équations différentielles avec retard</u>

Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, on définit l'ensemble :

$$S_a = \left\{ f \in C^1(\mathbb{R}) \mid \forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) + af(t-1) = 0 \right\}.$$

I. Dans toute cette partie, on fixe $a \in \mathbb{R}_+^*$.
1) Montrer que S_a est un sous-espace vectoriel de $C^1(\mathbb{R})$.
2) Montrer que $S_a \subset C^\infty(\mathbb{R})$.
Soit $f \in S_a$. On suppose qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \in [t_0, +\infty[,\ f(t) \neq 0.$$

On pose de plus $t_1 = t_0 + 1$.
3)a) Montrer que f est de signe constant sur l'intervalle $[t_0, +\infty[$.
3)b) En déduire que f est monotone sur l'intervalle $[t_1, +\infty[$.
3)c) Montrer que f admet une limite finie en $+\infty$.
3)d) Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $c_t \in]t-1, t[$ tel que :

$$f(t+1) - f(t) = -af(c_t).$$

3)e) Montrer que $f(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

II. Dans toute cette partie, on fixe $a \in]e^{-1}, +\infty[$.
On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = a \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = ae^{u_n}.$$

4) Déterminer les variations strictes et les limites en $-\infty$ et $+\infty$ de la fonction :

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & xe^{-x}. \end{array}$$

5)a) Montrer que la suite (u_n) est strictement positive.
5)b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ en fonction de a, φ et u_n.
5)c) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
5)d) Montrer que $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

La suite du problème 4 est **hors-barème**. Pour ceux qui souhaitent aller plus loin, cette partie pourra être rendue sous forme d'un devoir maison avant le vendredi 22 mai 2026.

III. Dans toute cette partie, on fixe $a \in \mathbb{R}_+^*$.
Pour tout $b \in \mathbb{R}$, on note :

$$f_b : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & e^{-bt}. \end{array}$$

6) Soit $b \in \mathbb{R}$. Montrer l'équivalence :

$$f_b \in S_a \Leftrightarrow be^{-b} = a.$$

7) On suppose que $a \in]0, e^{-1}]$.
Montrer que S_a contient au moins une fonction qui ne s'annule jamais.

IV. Dans toute cette partie, on fixe $a \in]e^{-1}, +\infty[$.
On suppose avoir trouvé une fonction $f \in S_a$ et un réel $t_0 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall t \in]-\infty, t_0],\ f(t) > 0.$$

On essaye alors d'aboutir à une contradiction.
8) Montrer que f est décroissante sur $]-\infty, t_0]$.
On pose :

$$h : \begin{array}{rcl}]-\infty, t_0] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(t)e^{at}. \end{array}$$

9)a) Montrer que h est décroissante.
9)b) En déduire que : $\forall t \leq t_0,\ f'(t) + ae^a f(t) \leq 0$.
9)c) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie en partie II.
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \leq t_0,\ f'(t) + u_n f(t) \leq 0$.
9)d) Conclure.

V. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $f \in C^1(\mathbb{R})$, on note $N(f)$ l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$.
Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
(i) Pour tout $f \in S_a$, l'ensemble $N(f)$ est infini,
(ii) $a \in]e^{-1}, +\infty[$.