PCSI, Bellevue, 2025-2026
Corrigé du devoir surveillé n°8 (concours blanc)

Problème 1 : Produits infinis

1)a) La fonction $\varphi : n \mapsto n-1$ est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{N}^*$. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n-1 < (n+1)-1$. Donc la suite $(p_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite extraite de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Or, par hypothèse, la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers λ donc la suite extraite $(p_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend également vers λ.

1)b) D'après l'énoncé, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k \neq 0$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n \neq 0$. De plus, on remarque que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $u_k = \frac{p_k}{p_{k-1}}$. Par hypothèse et d'après la question précédente, les suites $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(p_{k-1})_{k\in\mathbb{N}^*}$ tendent vers λ **qui est non nul** donc par quotient, la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers $\frac{\lambda}{\lambda} = 1$.

1)c) D'après la question précédente, la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers tend vers 1. On a $1 > 0$ donc il existe $m > 0$ et il existe $N \in \mathbb{N}$ tels que $\forall k \geq N$, $0 < m \leq u_k$. On peut le démontrer :
Par hypothèse, la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers tend vers 1, ce qui signifie que $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall k \geq N_\varepsilon, |u_k - 1| \leq \varepsilon$.
On pose $\varepsilon = \frac{1}{2}$. D'après l'hypothèse, il existe et on pose $N \in \mathbb{N} : \forall k \geq N, |u_k - 1| \leq \frac{1}{2}$. Alors, pour tout $k \geq N$, on a $1 - \frac{1}{2} \leq u_k \leq 1 + \frac{1}{2}$ et donc $u_k > 0$.
On a démontré que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est à termes strictement positifs à partir d'un certain rang.

2)a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$p_n = \prod_{k=0}^{n}(1 + \frac{1}{k+1}) = \prod_{k=0}^{n}(\frac{k+2}{k+1}) = \frac{\prod_{k=0}^{n}(k+2)}{\prod_{k=0}^{n}(k+1)} = \frac{\prod_{j=1}^{n+1}(j+1)}{\prod_{k=0}^{n}(k+1)} = \frac{(\prod_{j=1}^{n}(j+1))(n+2)}{(0+1)(\prod_{k=1}^{n}(k+1))} = \frac{n+2}{1} = n+2$$

2)b) D'après la question précédent, $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n = n+2$ donc $\lim_{n\to+\infty} p_n = +\infty$. Par définition, le produit infini $\prod_{k\geq 0} u_k$ diverge.

3)a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $p_n \times \sin(\frac{a}{2^n}) = p_{n-1} \times \cos(\frac{a}{2^n}) \times \sin(\frac{a}{2^n}) = p_{n-1} \times \frac{1}{2}\sin(\frac{2a}{2^n}) = p_{n-1} \times \frac{1}{2}\sin(\frac{a}{2^{n-1}})$ car $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$ donc $\sin(\alpha)\cos(\alpha) = \frac{1}{2}\sin(2\alpha)$.

3)b) On va démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'assertion $P(n) = [p_n = \frac{\sin(2a)}{2^{n+1}\sin(\frac{a}{2^n})}]$ est vraie.
Initialisation : Montrons que $P(0)$ est vraie.
D'une part, $p_0 = \cos(\frac{a}{2^0}) = \cos(a)$. D'autre part, $\frac{\sin(2a)}{2^{0+1}\sin(\frac{a}{2^0})} = \frac{\sin(2a)}{2\sin(a)} = \frac{2\sin(a)\cos(a)}{2\sin(a)} = \cos(a)$.
Donc $P(0)$ est vraie.
Hérédité : Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $P(n)$ est vraie. D'après la question précédente, on a $p_{n+1} \times \sin(\frac{a}{2^{n+1}}) = p_n \times \frac{1}{2}\sin(\frac{a}{2^n})$.
En utilisant aussi $P(n)$, on en déduit que $p_{n+1} = \frac{\sin(2a)}{2^{n+1}\sin(\frac{a}{2^n})} \times \frac{1}{2}\sin(\frac{a}{2^n}) \times \frac{1}{\sin(\frac{a}{2^{n+1}})} = \frac{\sin(2a)}{2^{n+2}\sin(\frac{a}{2^{n+1}})}$. On a déduit que $P(n+1)$ est vraie.
On a montré que $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$.
Conclusion : D'après le théorème de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'assertion $P(n)$ est vraie.

3)c) On rappelle que $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$. Or, comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, on a $\lim_{n\to+\infty}\frac{a}{2^n} = 0$. Par composition, $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin(\frac{a}{2^n})}{\frac{a}{2^n}} = 1$ donc $\sin(\frac{a}{2^n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a}{2^n}$. Par produit et quotient, on en déduit les équivalences asymptotiques suivantes :

$$p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sin(2a)}{2^{n+1}\sin(\frac{a}{2^n})} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sin(2a)}{2^{n+1}\frac{a}{2^n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sin(2a)}{2a}$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{\sin(2a)}{2a}$. Et comme $\forall \lambda \in \mathbb{Z}$, $a \neq \lambda\frac{\pi}{2}$, on a $2a \neq \lambda\pi$ et donc $\sin(2a) \neq 0$. On en conclut que le produit infini $\prod_{k\geq 0} u_k$ est convergent.

4) On a montré à la question 1) qu'une condition nécessaire pour que le produit infini $\prod_{k\geq 0} u_k$ converge est que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 1. Par contre, cette condition n'est pas suffisante. En effet, dans l'exemple de la question 2), la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 1 mais le produit infini $\prod_{k\geq 0} u_k$ est divergent.

5) On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \ln(\prod_{k=0}^{n} u_k) = \ln(p_n)$.
Supposons que le produit infini $\prod_{k\geq 0} u_k$ converge vers $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Comme $\forall k \in \mathbb{N},\ u_k > 0$, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ p_n > 0$; donc, par passage à la limite, $\lambda \geq 0$. Or $\lambda \neq 0$, donc $\lambda > 0$. Donc, comme la fonction ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, la

suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ln(\lambda)$.
Réciproquement, supposons que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Alors, comme $\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = e^{S_n}$, et comme la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$, la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers e^ℓ. Or $e^\ell \neq 0$, donc le produit infini $\prod_{k\geq 0} u_k$ converge.
Donc le produit infini $\prod_{k\geq 0} u_k$ converge si et seulement si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

6)a) La fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(x+1)}{x+1}$ est définie en $x \in \mathbb{R}$ lorsque $x+1 \in D_{\ln} = \mathbb{R}_+^*$ et lorsque $x+1 \in D_{\frac{1}{\cdot}} = \mathbb{R}^*$, c'est-à-dire lorsque $x+1 > 0$ et $x+1 \neq 0$, c'est-à-dire lorsque $x \in]-1, +\infty[$. Donc $D_f =]-1, +\infty[$.
De plus, la fonction f est le quotient de $x \mapsto \ln(x+1)$ par $x \mapsto x+1$, qui sont usuellement dérivables sur leurs domaines de définitions respectifs, donc f est dérivable sur D_f, avec :

$$\forall x \in D_f,\ f'(x) = \frac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2},$$

donc : $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) < 1 \Leftrightarrow x < e-1$, et $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e-1$; et donc $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > e-1$.
La fonction f est donc strictement croissante sur $]-1, e-1]$ et strictement décroissante sur $[e-1, +\infty[$.
b) Comme $e - 1 \simeq 1,718 < 2$, la fonction f est strictement décroissante sur $[2, +\infty[$. Par conséquent, pour $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq 2$:

$$\forall x \in [k, k+1],\ f(x) \leq f(k),$$

donc, par croissance de l'intégrale :

$$\int_k^{k+1} f(x)dx \leq \int_k^{k+1} f(k)dx = f(k) = \frac{\ln(k+1)}{k+1}.$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \ln(u_k) = \sum_{k=0}^{n} \ln\left((k+1)^{\frac{1}{k+1}}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\ln(k+1)}{k+1},$$

donc, d'après la question précédente :

$$S_n = f(1) + f(2) + \sum_{k=2}^{n} f(k) \geq f(1) + f(2) \sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} f(x)dx = 2\ln(2) + \int_2^{n+1} f(x)dx.$$

Or :

$$\int_2^{n+1} f(x)dx = \int_2^{n+1} \frac{\ln(x+1)}{x+1}dx = \left[\frac{(\ln(x+1))^2}{2}\right]_2^{n+1} = \frac{(\ln(n+1))^2}{2} - \frac{\ln(3)^2}{2},$$

donc la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par la suite $\left(\frac{(\ln(n+1))^2}{2} - \frac{\ln(3)^2}{2} + 2\ln(2)\right)_{n\in\mathbb{N}}$, et celle-ci diverge bien vers $+\infty$.
d) D'après le résultat ci-dessus, et d'après le théorème de divergence par minoration, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$. Donc, d'après la question 7), le produit infini $\prod_{k\geq 0} u_k$ diverge.

1)a) La fonction cot est définie sur $D = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } \sin(x) \neq 0\}$. Or, $\forall x \in \mathbb{R}$, on a l'équivalence : $\sin(x) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 0 + k\pi$. Donc $D = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall k \in \mathbb{Z}, x \neq k\pi\} = \cup_{p\in\mathbb{Z}}]p\pi, (p+1)\pi[$.

1)b) Soit $x \in D$. Alors $\sin(x) \neq 0$. Donc $\sin(x+\pi) = -\sin(x) \neq 0$ donc $x + \pi \in D$. Et $\cot(x+\pi) = \frac{\cos(x+\pi)}{\sin(x+\pi)} = \frac{-\cos(x)}{-\sin(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \cot(x)$. Cela démontre que la fonction cot est π-périodique.

1)c) On étudie la fonction cot sur l'intervalle $]0, \pi[\subset D$.
Par quotient de fonctions dérivables sur $]0, \pi[$, la fonction cot est dérivable sur $]0, \pi[$ et $\forall x \in]0, \pi[$, $\cot'(x) = \frac{-\sin^2(x)-\cos^2(x)}{\sin^2(x)} = -1 - \cot^2(x) < 0$. Donc la fonction cot est strictement décroissante sur $]0, \pi[$. Et $\cot'(\frac{\pi}{2}) = -1$ donc le graphe de la fonction cot présente au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ et d'ordonnée $\cot(\frac{\pi}{2}) = 0$ une tangente de coefficient directeur égal à -1.
Pour tout $x \in]0, \pi[$, $\sin(x) > 0$ donc par quotient $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \cot(x) = +\infty$ et $\lim_{\substack{x\to\pi\\ <}} \cot(x) = -\infty$.

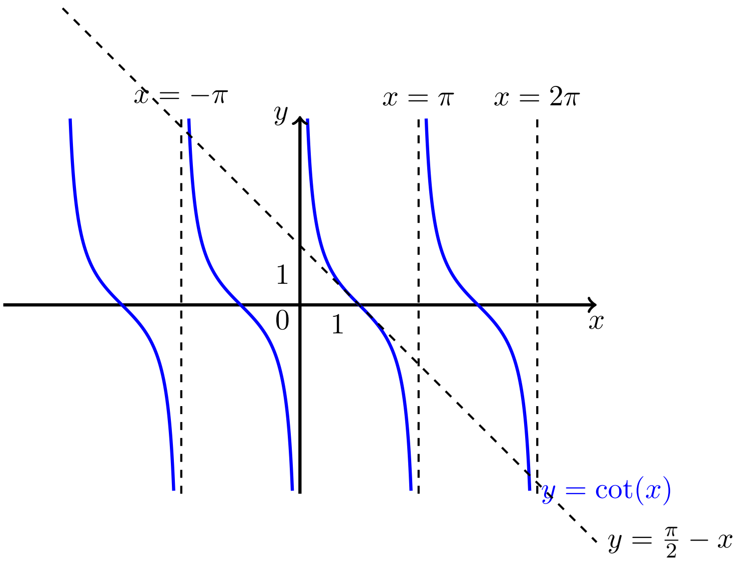
1)d) Soit $x \in D$. Alors $\sin(x) \neq 0$. Donc $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x) \neq 0$ donc $\tan(\frac{\pi}{2} - x)$ est bien défini. Et $\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{\cos(\frac{\pi}{2}-x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \cot(x)$.

1)e) Soit $x \in]0, \pi[$. D'après la question précédente, on a $\cot(x) = \tan(\frac{\pi}{2} - x) = -\tan(x - \frac{\pi}{2})$. Or, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(x - \frac{\pi}{2}) = 0$ et le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction tan est : $\forall y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\tan(y) = y + \frac{1}{3}y^3 + \underset{y\to 0}{o}(y^3) = y + \frac{1}{3}y^3 + y^3\varepsilon_1(y)$ avec $\lim_{y\to 0} \varepsilon_1(y) = 0$. Donc par composition,

$$\begin{aligned}
\forall x \in]0, \pi[\,, \cot(x) &= -(x - \tfrac{\pi}{2}) - \tfrac{1}{3}(x - \tfrac{\pi}{2})^3 - (x - \tfrac{\pi}{2})^3\varepsilon_1(x - \tfrac{\pi}{2}) \\
&= -(x - \tfrac{\pi}{2}) - \tfrac{1}{3}(x - \tfrac{\pi}{2})^3 + (x - \tfrac{\pi}{2})^3\varepsilon_2(x) \qquad \text{avec } \varepsilon_2(x) = -\varepsilon_1(x - \tfrac{\pi}{2}) \\
& \qquad \text{donc par composition } \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \varepsilon_2(x) = 0 \\
&= -(x - \tfrac{\pi}{2}) - \tfrac{1}{3}(x - \tfrac{\pi}{2})^3 + \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{o}((x - \tfrac{\pi}{2})^3)
\end{aligned}$$

Ce qui est le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de $\frac{\pi}{2}$ de la fonction cot.

1)f)



2)a) On a $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ c'est-à-dire $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ donc $0 < 2\alpha < \pi$ donc $\sin(2\alpha) \neq 0$ et par conséquent, $\frac{1+\cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)}$ est bien défini. De plus, $\frac{1+\cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)} = \frac{1+\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)}{2\sin(\alpha)\cos(\alpha)} = \frac{2\cos^2(\alpha)}{2\sin(\alpha)\cos(\alpha)} = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \cot(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)}$.

2)b) Sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}[$, la fonction tan est 2-fois dérivable et $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$ et $\tan''(x) = 2\tan'(x)\tan(x) = 2(1+\tan^2(x))\tan(x) \geq 0$. On en déduit que la fonction tan est convexe sur $[0, \frac{\pi}{2}[$. Par conséquent, son graphe est au-dessus de toutes ses tangentes, et notamment de sa tangente au point d'abscisse 0 qui est le graphe de la fonction $x \mapsto \tan(0) + \tan'(0)(x - 0) = x$. Donc, $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $x \leq \tan(x)$.
Comme $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$, alors $0 < \alpha \leq \tan(\alpha)$ et par inverse, $0 < \frac{1}{\tan(\alpha)} \leq \frac{1}{\alpha}$.
Ainsi, d'après la question précédente, par transitivité, on obtient que $0 < \frac{1+\cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)} \leq \frac{1}{\alpha}$.

3)a) Par factorisation, on a $\frac{1}{1-e^{it}} = \frac{-1}{e^{it}-1} = \frac{-1}{e^{i\frac{t}{2}}(e^{i\frac{t}{2}}-e^{-i\frac{t}{2}})} = \frac{-1}{e^{i\frac{t}{2}}\times 2i\sin(\frac{t}{2})} = \frac{-e^{-i\frac{t}{2}}\times(-i)}{2\sin(\frac{t}{2})} = \frac{ie^{-i\frac{t}{2}}}{2\sin(\frac{t}{2})} = \frac{i(\cos(\frac{t}{2})-i\sin(\frac{t}{2}))}{2\sin(\frac{t}{2})}$.
Donc d'une part $\left|\frac{1}{1-e^{it}}\right| = \frac{1}{2|\sin(\frac{t}{2})|}$ et d'autre part $\frac{1}{1-e^{it}} = \frac{\sin(\frac{t}{2})+i\cos(\frac{t}{2})}{2\sin(\frac{t}{2})} = \frac{1}{2}+\frac{i}{2}\cot(\frac{t}{2})$. En posant $z=\frac{1}{2}$ et $w=\frac{i}{2}$ on a bien $\frac{1}{1-e^{it}} = z + w\cot(\frac{t}{2})$.

3)b) On a $|1-\frac{1}{1-e^{it}}| = |\frac{1-e^{it}-1}{1-e^{it}}| = |\frac{-e^{it}}{1-e^{it}}| = \frac{|-e^{it}|}{|1-e^{it}|} = \frac{1}{|1-e^{it}|} = |\frac{1}{1-e^{it}}|$.

4) Soient $i,j \in [\![1,n-1]\!]$ tels que $i<j$. D'après les hypothèses de l'énoncé, on a $0<\theta\leq y_i\leq y_j\leq 2\pi-\theta<2\pi$ donc $0<\frac{\theta}{2}\leq\frac{y_i}{2}\leq\frac{y_j}{2}\leq\pi-\frac{\theta}{2}<\pi$. Or, la fonction cot est décroissante sur $]0,\pi[$ donc $\cot(\pi-\frac{\theta}{2})\leq\cot(\frac{y_j}{2})\leq\cot(\frac{y_i}{2})\leq\cot(\frac{\theta}{2})$. De plus, $\cot(\pi-\frac{\theta}{2})=\cot(-\frac{\theta}{2})=-\cot(\frac{\theta}{2})$. Donc $-\cot(\frac{\theta}{2})\leq\cot(\frac{y_j}{2})\leq\cot(\frac{y_i}{2})\leq\cot(\frac{\theta}{2})$. On en déduit que $\cot(\frac{y_j}{2})\leq\cot(\frac{\theta}{2})$ et $-\cot(\frac{y_i}{2})\leq\cot(\frac{\theta}{2})$ donc par somme, $\cot(\frac{y_j}{2})-\cot(\frac{y_i}{2})\leq 2\cot(\frac{\theta}{2})$.

5)a) D'après l'énoncé, on a $0<\theta\leq y_k\leq y_{k+1}\leq 2\pi-\theta<2\pi$. En utilisant les résultats et notations des questions précédentes, on a $c_{k+1}-c_k = \frac{1}{1-e^{iy_{k+1}}}-\frac{1}{1-e^{iy_k}} = (z+w\cot(\frac{y_{k+1}}{2}))-(z+w\cot(\frac{y_k}{2})) = \frac{i}{2}(\cot(\frac{y_{k+1}}{2})-\cot(\frac{y_k}{2}))$. Donc $c_{k+1}-c_k$ est imaginaire pur.
De plus, $0<\frac{y_k}{2}\leq\frac{y_{k+1}}{2}<\pi$ et la fonction cot est strictement décroissante sur $]0,\pi[$ donc $\cot(\frac{y_k}{2})>\cot(\frac{y_{k+1}}{2})$ et donc $\mathrm{Im}(c_{k+1}-c_k)=\frac{1}{2}(\cot(\frac{y_{k+1}}{2})-\cot(\frac{y_k}{2}))<0$.
Par conséquent, $|c_{k+1}-c_k| = \frac{1}{2}(\cot(\frac{y_k}{2})-\cot(\frac{y_{k+1}}{2}))$.

5)b) On a $|c_k| = \left|\frac{1}{1-e^{iy_k}}\right| = \frac{1}{2|\sin(\frac{y_k}{2})|}$. De plus, $0<\frac{y_k}{2}<\frac{\pi}{2}$ donc $\sin(\frac{y_k}{2})>0$ et par conséquent $|c_k| = \frac{1}{2\sin(\frac{y_k}{2})}$.
Ensuite, $0<\frac{\theta}{2}\leq\frac{y_k}{2}\leq\pi-\frac{\theta}{2}<\pi$. De plus, la fonction sin est strictement croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ et $\theta\in]0,\pi[$ donc $\frac{\theta}{2}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et $\pi-\frac{\theta}{2}\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$. Donc :
- si $\frac{y_k}{2}\leq\frac{\pi}{2}$ alors $0<\frac{\theta}{2}\leq\frac{y_k}{2}\leq\frac{\pi}{2}$ donc $0<\sin(\frac{\theta}{2})\leq\sin(\frac{y_k}{2})$,
- si $\frac{\pi}{2}\leq\frac{y_k}{2}$ alors $\frac{\pi}{2}\leq\frac{y_k}{2}\leq\pi-\frac{\theta}{2}<\pi$ donc $0<\sin(\frac{\theta}{2})=\sin(\pi-\frac{\theta}{2})\leq\sin(\frac{y_k}{2})$.
Par conséquent $0<2\sin(\frac{\theta}{2})\leq 2\sin(\frac{y_k}{2})$ puis $|c_k| = \frac{1}{2\sin(\frac{y_k}{2})}\leq\frac{1}{2\sin(\frac{\theta}{2})}$.

5)c) On a $e^{ix_k}-e^{ix_{k+1}} = e^{ix_k}-e^{i(y_k+x_k)} = e^{ix_k}-e^{iy_k}e^{ix_k} = e^{ix_k}(1-e^{iy_k}) = e^{ix_k}\times\frac{1}{c_k}$.

6)a) D'après la question précédente, $\forall k\in[\![1,n-1]\!]$, $e^{ix_k}-e^{ix_{k+1}} = e^{ix_k}\times\frac{1}{c_k}$ donc $c_k(e^{ix_k}-e^{ix_{k+1}}) = e^{ix_k}$. Par somme, on obtient $\sum_{k=1}^{n-1}c_k(e^{ix_k}-e^{ix_{k+1}}) = \sum_{k=1}^{n-1}e^{ix_k} = (\sum_{k=1}^{n}e^{ix_k})-e^{ix_n}$. Donc en posant $\gamma=e^{ix_n}$ on a bien $\sum_{k=1}^{n}e^{ix_k} = \sum_{k=1}^{n-1}c_k(e^{ix_k}-e^{ix_{k+1}})+\gamma$.

6)b) En utilisant les résultats des questions précédentes, on a :

$$\begin{array}{rl}
 & c_1e^{ix_1}+\sum_{k=2}^{n-1}(c_k-c_{k-1})e^{ix_k}+(1-c_{n-1})e^{ix_n}\\
= & c_1e^{ix_1}+\sum_{k=2}^{n-1}c_ke^{ix_k}-\sum_{k=2}^{n-1}c_{k-1}e^{ix_k}+e^{ix_n}-c_{n-1}e^{ix_n}\\
= & \sum_{k=1}^{n-1}c_ke^{ix_k}-\sum_{k=2}^{n}c_{k-1}e^{ix_k}+e^{ix_n}\\
= & \sum_{k=1}^{n-1}c_ke^{ix_k}-\sum_{k=1}^{n-1}c_ke^{ix_{k+1}}+e^{ix_n}\\
= & \sum_{k=1}^{n-1}c_k(e^{ix_k}-e^{ix_{k+1}})+e^{ix_n}\\
= & \sum_{k=1}^{n-1}c_k\times e^{ix_k}\times\frac{1}{c_k}+e^{ix_n}\\
= & \sum_{k=1}^{n-1}e^{ix_k}+e^{ix_n}\\
= & \sum_{k=1}^{n}e^{ix_k}
\end{array}$$

7)a) Toujours en utilisant les résultats des questions précédentes, on a :

$$\begin{array}{rl}
 & \left|\sum_{k=1}^{n}e^{ix_k}\right|\\
= & \left|c_1e^{ix_1}+\sum_{k=2}^{n-1}(c_k-c_{k-1})e^{ix_k}+(1-c_{n-1})e^{ix_n}\right|\\
\leq & \left|c_1e^{ix_1}\right|+\sum_{k=2}^{n-1}\left|(c_k-c_{k-1})e^{ix_k}\right|+\left|(1-c_{n-1})e^{ix_n}\right|\\
\leq & |c_1|+\sum_{k=2}^{n-1}|c_k-c_{k-1}|+\left|1-\frac{1}{1-e^{iy_{n-1}}}\right|\\
\leq & \frac{1}{2\sin(\frac{\theta}{2})}+\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{2}(\cot(\frac{y_k}{2})-\cot(\frac{y_{k+1}}{2}))+\left|\frac{1}{1-e^{iy_{n-1}}}\right|\\
\leq & \frac{1}{2\sin(\frac{\theta}{2})}+\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{2}(\cot(\frac{y_k}{2})-\cot(\frac{y_{k+1}}{2}))+|c_{n-1}|\\
\leq & \frac{1}{2\sin(\frac{\theta}{2})}+\frac{1}{2}(\cot(\frac{y_2}{2})-\cot(\frac{y_n}{2}))+\frac{1}{2\sin(\frac{\theta}{2})}\\
\leq & \frac{1}{\sin(\frac{\theta}{2})}+\cot(\frac{\theta}{2})
\end{array}$$

7)b) On a $\frac{\theta}{2}\in]0,\frac{\pi}{2}[$ donc $2\times\frac{\theta}{2}\in]0,\pi[$ donc $\frac{1}{\sin(\frac{\theta}{2})}+\cot(\frac{\theta}{2}) = \frac{1+\cos(2\times\frac{\theta}{4})}{\sin(2\times\frac{\theta}{4})}\leq\frac{1}{\frac{\theta}{4}}=\frac{4}{\theta}$. Ce qui permet de conclure que $|\sum_{k=1}^{n}e^{ix_k}|\leq\frac{4}{\theta}$.

Problème 3 : Polynômes d'interpolation de Lagrange

1)a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soient $P(X), Q(X) \in \mathbb{R}[X]$. On a :

$$\begin{aligned}
& \Phi(\lambda.P(X) + Q(X)) \\
= & \Phi((\lambda.P + Q)(X)) \\
= & ((\lambda.P + Q)(x_1), \dots, (\lambda.P + Q)(x_n)) \\
= & (\lambda.P(x_1) + Q(x_1), \dots, \lambda.P(x_n) + Q(x_n)) \\
= & \lambda.(P(x_1)+, \dots, P(x_n)) + (Q(x_1), \dots, Q(x_n)) \\
= & \lambda.\Phi(P(X)) + \Phi(Q(X))
\end{aligned}$$

On a vérifié que Φ est linéaire.

1)b) On le démontre par contraposition. On suppose que $x_1, \dots, x_n$ ne sont pas deux à deux distincts. Alors, il existe $i, j \in [\![1, n]\!]$ tels que $i \neq j$ et $x_i = x_j$. Par conséquent, $\forall P(X) \in \mathbb{R}[X]$, $P(x_i) = P(x_j)$. En choisissant par exemple $Y = (1, \dots, n)$, $\forall P(X) \in \mathbb{R}[X]$, comme $P(x_i) = P(x_j)$ alors que $i \neq j$, $(P(x_1), \dots, P(x_n)) \neq (1, \dots, n)$ c'est-à-dire que $\Phi(P(X)) \neq Y$. Cela justifie que Φ n'est pas surjective.
On a obtenu par contraposition que si Φ est surjective alors $x_1, \dots, x_n$ sont deux à deux distincts.

2)a) • On remarque que $0_{\mathbb{R}[X]} = \omega(X)0_{\mathbb{R}[X]}$. Donc $0_{\mathbb{R}[X]} \in F$.
• Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P_1(X), P_2(X) \in F$. Par définition de F, il existe $Q_1(X), Q_2(X) \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P_1(X) = \omega(X)Q_1(X)$ et $P_2(X) = \omega(X)Q_2(X)$. Par conséquent, $\lambda.P_1(X) + P_2(X) = \lambda.\omega(X)Q_1(X) + \omega(X)Q_2(X) = \omega(x)(\lambda.Q_1(X) + Q_2(X)) \in F$.
Cela démontre que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

2)b) On rappelle que $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
• On a bien $0_{\mathbb{R}[X]} \in F$ et $0_{\mathbb{R}[X]} \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc $0_{\mathbb{R}[X]} \in F \cap \mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc $\{0_{\mathbb{R}[X]}\} \subset F \cap \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
• Réciproquement, soit $P(X) \in F \cap \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Comme $P(X) \in F$, il existe $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = \omega(X)Q(X)$. Le polynôme $\omega(X)$ est un produit de n polynômes de degré 1 donc $\deg(\omega(X)) = n$. Si $Q(X) \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$ alors $\deg(P(X)) = \deg(\omega(X)Q(X)) = \deg(\omega(X)) + \deg(Q(X)) \geq n + 0 = n$: c'est en contradiction avec $P(X) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Donc $Q(X) = 0_{\mathbb{R}[X]}$ et par conséquent $P(X) = \omega(X)0_{\mathbb{R}[X]} = 0_{\mathbb{R}[X]} \in \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$. Cela démontre que $F \cap \mathbb{R}_{n-1}[X] \subset \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$.
• Comme F et $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$, par somme, $F + \mathbb{R}_{n-1}[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
• Réciproquement, soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$. On fait la division euclidienne de $P(X)$ par $\omega(X)$. On note $Q(X)$ le quotient et $R(X)$ le reste. On a $\deg(R(X)) < \deg(\omega(X)) = n$ donc $R(X) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Et $P(X) = \omega(X)Q(X) + R(X) \in F + \mathbb{R}_{n-1}[X]$ car $\omega(X)Q(X) \in F$. Cela démontre que $\mathbb{R}[X] \subset F + \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
D'après les quatre inclusions obtenues, les sous-espaces vectoriels F et $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$ et de plus, $\forall P(X) \in \mathbb{R}[X]$, son unique décomposition comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est donnée par la division euclidienne de $P(X)$ par $\omega(X)$.

3) Soit $P(X) \in \mathbb{R}[X]$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& P(X) \in \mathrm{Ker}(\Phi) \\
\Leftrightarrow\ & \Phi(P(X)) = 0_{\mathbb{R}^n} \\
\Leftrightarrow\ & (P(x_1), \dots, P(x_n)) = (0, \dots, 0) \\
\Leftrightarrow\ & \forall i \in [\![1, n]\!], P(x_i) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \forall i \in [\![1, n]\!], x_i \text{ est une racine de } P(X) \\
\Leftrightarrow\ & \omega(X) = (X - x_1) \dots (X - x_n) \text{ divise } P(X) \quad \text{car } x_1, \dots, x_n \text{ deux à deux distincts} \\
\Leftrightarrow\ & \exists Q(X) \in \mathbb{R}[X] : P(X) = \omega(X)Q(X) \\
\Leftrightarrow\ & P(X) \in F
\end{aligned}$$

Cela démontre que $\mathrm{Ker}(\Phi) = F$.

4) Soit $P(X) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. On suppose que $f(P(X)) = 0_{\mathbb{R}^n}$ c'est-à-dire que $(P(x_1), \dots, P(x_n)) = (0, \dots, 0)$. Alors $P(X) \in \mathrm{Ker}(\Phi)$. Or, $\mathrm{Ker}(\Phi) = F$. Donc $P(X) \in F$. De plus par hypothèse $P(X) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Donc $P(X) \in F \cap \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Or, F et $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ sont en somme directe donc $P(X) = 0_{\mathbb{R}[X]} = 0_{\mathbb{R}_{n-1}[X]}$.
Cela démontre que la restriction f est injective.

5) Avec les données particulières de cette question, on a

$$L_1(X) = \frac{1}{\omega_1(x_1)}\omega_1(X) = \frac{1}{(-1-0)(-1-2)}(X-0)(X-2) = \frac{1}{3}X^2 - \frac{2}{3}X$$

$$L_2(X) = \frac{1}{\omega_2(x_2)}\omega_2(X) = \frac{1}{(0-(-1))(0-2)}(X-(-1))(X-2) = -\frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}X + 1$$

$$L_3(X) = \frac{1}{\omega_3(x_3)}\omega_3(X) = \frac{1}{(2-(-1))(2-0)}(X-(-1))(X-0) = \frac{1}{6}X^2 + \frac{1}{6}X$$

6)a) Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, le polynôme $L_i(X)$ est un produit de $n-1$ polynômes de degré 1 donc $\deg(L_i(X)) = n-1$.

6)b) Soient $i, j \in [\![1,n]\!]$.
Si $j = i$ alors $L_i(x_j) = L_i(x_i) = \frac{1}{\omega_i(x_i)}\omega_i(x_i) = 1$.
Si $j \neq i$ alors $L_i(x_j) = \frac{1}{\omega_i(x_i)}\omega_i(x_j)$. De plus, $\omega_i(x_j) = \prod_{1\leq k\leq n \ | \ k\neq i}(x_j - x_k)$: c'est un produit dont l'un des facteurs est nul car $1 \leq j \leq n$ et $j \neq i$. Donc $L_i(x_j) = 0$.
En utilisant le symbole de Kronecker, on peut conclure que $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$.

7) Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. On a les implications suivantes :

$$\begin{array}{ll} & \lambda_1.L_1(X) + \cdots + \lambda_n.L_n(X) = 0_{\mathbb{R}[X]} \\ \Rightarrow & (\sum_{k=1}^n \lambda_k.L_k)(X) = 0_{\mathbb{R}[X]} \\ \Rightarrow & \forall j \in [\![1,n]\!], (\sum_{k=1}^n \lambda_k.L_k)(x_j) = 0_{\mathbb{R}[X]}(x_j) \\ \Rightarrow & \forall j \in [\![1,n]\!], \sum_{k=1}^n \lambda_k.L_k(x_j) = 0 \\ \Rightarrow & \forall j \in [\![1,n]\!], \sum_{k=1}^n \lambda_k.\delta_{k,j} = 0 \\ \Rightarrow & \forall j \in [\![1,n]\!], \lambda_j \times 1 = 0 \\ \Rightarrow & \forall j \in [\![1,n]\!], \lambda_j = 0 \end{array}$$

Cela démontre que la famille $\mathcal{L}$ est libre.

8)a) Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$. Donc : $f(L_i) = (L_i(x_1), \ldots, L_i(x_{i-1}), L_i(x_i), L_i(x_{i+1}), \ldots, L_i(x_n))$ $= (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$: le i-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

8)b) Soit $Y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. On pose $P(X) = y_1.L_1(X) + \cdots + y_n.L_n(X)$. Par combinaison linéaire de polynômes de degrés $n-1$, $P(X)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$. Donc $P(X) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. De plus, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $P(x_i) = \sum_{k=1}^n y_k.L_k(x_i) = \sum_{k=1}^n y_k.\delta_{k,i} = y_i \times 1 = y_i$. Donc $f(P(X)) = (P(x_1), \ldots, P(x_n)) = (y_1, \ldots, y_n) = Y$.
Cela démontre que f est surjective.

9) D'après les questions précédentes, l'application linéaire f est un isomorphisme et son isomorphisme réciproque est défini par : $\forall Y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $f^{-1}(Y) = y_1.L_1(X) + \cdots + y_n.L_n(X)$.
Par conséquent, dans le cas particulier où $n = 3$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$, l'unique polynôme $P(X) \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(-1) = 6$, $P(0) = 0$, $P(2) = 3$ est $f^{-1}((6,0,3)) = 6.L_1(X) + 0.L_2(X) + 3.L_3(X) = 6(\frac{1}{3}X^2 - \frac{2}{3}X) + 3(\frac{1}{6}X^2 + \frac{1}{6}X) = \frac{5}{2}X^2 - \frac{7}{2}X$.

10)a) L'application linéaire f est un isomorphisme donc notamment $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_{n-1}[X]}$.
Soit $j \in [\![0, n-1]\!]$. On a $X^j \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc $X^j = f^{-1}(f(X^j)) = f^{-1}((x_1^j, \ldots, x_n^j)) = x_1^j.L_1(X) + \cdots + x_n^j.L_n(X)$: c'est une décomposition de X^j comme combinaison linéaire des polynômes de la famille $\mathcal{L}$.

10)b) • On a déjà démontré que $\mathcal{L}$ est libre.
• Les polynômes de la famille $\mathcal{L}$ sont tous de degré $n-1$ donc $\mathcal{L}$ est bien une famille de polynômes de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Comme $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est stable par combinaison linéaire, alors $\mathrm{Vect}(\mathcal{L}) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Réciproquement, soit $P(X) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j X^j \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. En utilisant la question précédente, on obtient que $P(X) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j X^j = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(x_1^j.L_1(X) + \cdots + x_n^j.L_n(X)) = \sum_{k=1}^n (\sum_{j=0}^{n-1} a_j x_k^j).L_k(X)$: donc $P(X) \in \mathrm{Vect}(\mathcal{L})$.
Cela démontre que $\mathbb{R}_{n-1}[X] \subset \mathrm{Vect}(\mathcal{L})$.
D'après ce qui précède, la famille $\mathcal{L}$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et de plus, $\forall P(X) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, son unique décomposition comme combinaison linéaire des polynômes de $\mathcal{L}$ est $P(X) = \sum_{k=1}^n (\sum_{j=0}^{n-1} a_j x_k^j).L_k(X)$.

I. 1) Comme $0 + a \times 0 = 0$, la fonction constante égale à 0 appartient à S_a.
Soient $f, g \in S_a$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R},\ (\lambda f + \mu g)'(t) + a(\lambda f + \mu g)(t-1) &= \lambda\left(f'(t) + af(t-1)\right) + \mu\left(g'(t) + ag(t-1)\right) \\ &\underset{f,g\in S_a}{=} \lambda \times 0 + \mu \times 0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

donc $\lambda f + \mu g \in S_a$. Donc S_a est stable par combinaison linéaire.
Donc S_a est un sous-espace vectoriel de $C^1(\mathbb{R})$.

2) Soit $f \in S_a$. Montrons que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.
On procède par récurrence : notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ l'assertion "$f \in C^n(\mathbb{R})$".
Comme $f \in C^1(\mathbb{R})$, $P(1)$ est vraie.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $P(n)$ vraie. Alors f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$. On sait de plus que : $\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = -af(t-1)$.
Comme la fonction $t \mapsto t-1$ est usuellement de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, par composition, la fonction $t \mapsto -af(t-1)$ est de classe C^n sur $\mathbb{R}$, donc f' est de classe C^n sur $\mathbb{R}$. Donc f est de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$. Donc $P(n+1)$ est vraie.
Par récurrence, $P(n)$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Donc $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.
Donc $S_a \subset C^\infty(\mathbb{R})$.

3)a) D'après la question précédente, la fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$; elle est donc en particulier continue sur $\mathbb{R}$.
Comme la fonction f est continue et ne s'annule pas sur $[t_0, +\infty[$, d'après la contraposée du théorème des valeurs intermédiaires, elle est soit strictement positive sur $[t_0, +\infty[$, soit strictement négative sur $[t_0, +\infty[$.

3)b) Supposons par exemple que f soit strictement positive sur $[t_0, +\infty[$. Alors :

$$\forall t \in [t_1, +\infty[, \quad t - 1 \in [t_0, +\infty[,$$

donc :

$$\forall t \in [t_1, +\infty[, \quad f'(t) = -af(t-1) < 0,$$

donc f est strictement décroissante sur $[t_1, +\infty[$.
De même, si f est strictement négative sur $[t_0, +\infty[$, alors f est strictement croissante sur $[t_1, +\infty[$.
Dans tous les cas, f est donc monotone sur $[t_1, +\infty[$.

3)c) D'après la disjonction de cas ci-dessus : soit f est positive, donc minorée par 0, et décroissante sur $[t_1, +\infty[$; soit f est négative, donc majorée par 0, et croissante sur $[t_1, +\infty[$. Dans les deux cas, d'après le théorème de la convergence monotone, f admet une limite finie en $+\infty$.

3)d) Comme la fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, elle est en particulier continue sur $[t, t+1]$ et dérivable sur $]t, t+1[$.
D'après le théorème des accroissements finis, il existe donc $d_t \in]t, t+1[$ tel que $f(t+1) - f(t) = f'(d_t) = -af(d_t - 1)$.
Donc $c_t = d_t - 1 \in]t-1, t[$ convient.

3)e) Notons $\ell \in \mathbb{R}$ la limite de la fonction f en $+\infty$: $f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
Comme $t + 1 \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on a $f(t+1) - f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \ell - \ell = 0$.
D'autre part, comme, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $c_t > t - 1$, d'après le théorème de divergence par minoration, $c_t \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc $-af(c_t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} -a\ell$.
Donc, par unicité de la limite, $-a\ell = 0$. Donc, comme $a > 0$, $\ell = 0$.
Donc $f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

II. 4) La fonction φ est le produit des fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto e^{-x}$, qui sont usuellement dérivables sur $\mathbb{R}$. Donc φ est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}.$$

Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$, $\varphi'(x) > 0$ lorsque $1 - x > 0$, c'est-à-dire lorsque $x < 1$; $\varphi'(x) = 0$ lorsque $1 - x = 0$, c'est-à-dire lorsque $x = 1$; et donc $\varphi'(x) < 0$ lorsque $x > 1$.

Donc φ est strictement croissante sur $-]\infty, 1]$ et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$.
De plus, par produit de limites : $\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = -\infty$, et par croissances comparées : $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$.
On a donc le tableau :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$		$-$	
			e^{-1}		
$\varphi(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	
	$-\infty$				0

5)a) On a $u_0 = a > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = ae^{u_n} > 0$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

5)b) On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{ae^{u_n}}{u_n} = \frac{a}{\varphi(u_n)}$.

5)c) D'après l'étude des variations de la fonction φ, $\varphi(1) = e^{-1}$ est le maximum de φ sur $\mathbb{R}$; et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, comme $e^{-x} > 0$, $\varphi(x) > 0$. Donc :

$$\forall x > 0,\ \ \varphi(x) \in \,]0, e^{-1}],$$

donc, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ \varphi(u_n) \in \,]0, e^{-1}].$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{a}{e^{-1}}$, donc, comme $a \in \,]e^{-1}, +\infty[$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, donc, comme $u_n > 0$, $u_{n+1} > u_n$.
Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
5)d) Comme la suite (u_n) est croissante, d'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers un réel ℓ ou diverge vers $+\infty$.
Supposons (u_n) convergente vers vers un réel ℓ. Alors, comme : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = ae^{u_n}$, on a, par passage à la limite $n \to +\infty$: $\ell = ae^{\ell}$, c'est-à-dire $\varphi(\ell) = a$.
Or, d'après l'étude de la fonction φ : $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) \leq e^{-1} < a$. Donc l'égalité $\varphi(\ell) = a$ est absurde.
Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

III. 6) Remarquons que $f_b \in C^1(\mathbb{R})$.
Supposons que $f_b \in S_a$. Alors : $\forall t \in \mathbb{R},\ f_b'(t) + af_b(t-1) = 0$, c'est-à-dire que $-be^{-bt} + ae^{-b(t-1)} = 0$, donc $0 = e^{-bt}\left(-b + ae^b\right)$. En particulier, pour $t = 0$, on a : $-b + ae^b = 0$, donc $be^{-b} = a$.
Réciproquement, supposons que $be^{-b} = a$. Alors :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f_b'(t) = -be^{-bt} = -ae^be^{-bt} = -ae^{-b(t-1)} = -af_b(t-1).$$

Donc $f_b \in S_a$.

7) On vient de montrer que : $\forall b \in \mathbb{R},\ f_b \in S_a \Leftrightarrow \varphi(b) = a$.
Comme $a \in \left]0, e^{-1}\right] \subset \varphi(\mathbb{R})$, il existe $b_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(b_0) = a$. Donc $f_{b_0} \in S_a$. Or, comme la fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, la fonction $f_{b_0} : t \mapsto e^{-b_0 t}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
Donc S_a contient une fonction qui ne s'annule jamais.

IV. 8) On a : $\forall t \in \left]-\infty, t_0\right],\ t-1 \in \left]-\infty, t_0\right]$, donc $f(t-1) > 0$, donc $f'(t) = -af(t-1) < 0$.
Donc f est décroissante sur $\left]-\infty, t_0\right]$.

9) a) La fonction h est le produit de la fonction f, dérivable par hypothèse, et de la fonction $t \mapsto e^{at}$, usuellement dérivable. Donc h est dérivable, avec :

$$\forall t \in \left]-\infty, t_0\right],\ h'(t) = f'(t)e^{at} + af(t)e^{at} = \left(f'(t) + af(t)\right)e^{at}.$$

Or, comme f est décroissante sur $\left]-\infty, t_0\right]$:

$$\forall t \in \left]-\infty, t_0\right],\ f'(t) + af(t) \leq f'(t) + af(t-1) = 0,$$

donc $h'(t) \leq 0$.
Donc la fonction h est décroissante.

9)b) Soit $t \leq t_0$. On a :

$$\begin{aligned} f'(t) + ae^a f(t) \leq 0 &\Leftrightarrow -af(t-1) + ae^a f(t) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow -af(t-1)e^{a(t-1)} + ae^{at} f(t) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow -ah(t-1) + ah(t) \leq 0 \\ &\underset{a>0}{\Leftrightarrow} h(t) \leq h(t-1), \end{aligned}$$

ce qui est vrai puisque h est décroissante. Donc, par équivalence, $f'(t) + ae^a f(t) \leq 0$.

9)c) On procède par récurrence : notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ l'assertion "$\forall t \leq t_0,\ f'(t) + u_n f(t) \leq 0$".
D'après la question précédente, $P(1)$ est vraie.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ vraie, c'est-à-dire : $\forall t \leq t_0,\ f'(t) + u_n f(t) \leq 0$.
Posons alors :

$$\begin{array}{rccl} h_n : & \left]-\infty, t_0\right] & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & f(t)e^{u_n t}. \end{array}$$

D'après l'hypothèse de récurrence, et en procédant comme en a., on montre que la fonction h_n est décroissante.
Alors, comme en b. :
Soit $t \leq t_0$. On a :

$$\begin{aligned} f'(t) + u_{n+1} f(t) \leq 0 &\Leftrightarrow f'(t) + ae^{u_n} f(t) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow -af(t-1) + ae^{u_n} f(t) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow -af(t-1)e^{u_n(t-1)} + ae^{u_n t} f(t) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow -ah_n(t-1) + ah_n(t) \leq 0 \\ &\underset{a>0}{\Leftrightarrow} h_n(t) \leq h_n(t-1), \end{aligned}$$

ce qui est vrai puisque h_n est décroissante. Donc, par équivalence, $P(n+1)$ est vraie.
Donc, par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

9)d) D'après la question précédente, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f'(t_0) + u_n f(t_0) \leq 0$.
Or, par hypothèse, $f(t_0) > 0$, et on a montré que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donc :

$$f'(t_0) + u_n f(t_0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

ce qui est incompatible avec l'inégalité ci-dessus.
Il n'existe donc pas $f \in S_a$ et un réel $t_0 \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall t \in]-\infty, t_0],\ f(t) > 0$.

V. Supposons que $a \leq e^{-1}$. Alors, d'après la partie III., il existe $f \in S_a$ telle que l'ensemble $N(f)$ est vide. Donc, par contraposée, (i) $\Rightarrow$ (ii).
Réciproquement, supposons que $a > e^{-1}$. Soit $f \in S_a$. D'après la partie IV., il n'existe pas $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall t \in]-\infty, t_0],\ f(t) > 0$; autrement dit, pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, il existe $t \in]-\infty, t_0]$ tel que $f(t) \leq 0$.
De plus, comme S_a est un espace vectoriel, $-f \in S_a$, donc de même, pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, il existe $t \in]-\infty, t_0]$ tel que $-f(t) \leq 0$, c'est-à-dire $f(t) \geq 0$.
Par conséquent, pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, f change de signe sur $]-\infty, t_0]$; donc, comme f est continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, f s'annule sur $]-\infty, t_0]$.
Supposons que l'ensemble $N(f)$ soit fini, alors cet ensemble admet un plus petit élément m. Soit alors m' tel que f s'annule sur $]-\infty, m-1]$, alors $m' \in N(f)$ et $m' < m$, ce qui est absurde. Donc $N(f)$ est infini.
Donc (ii) $\Rightarrow$ (i).
Donc (i) $\Leftrightarrow$ (ii).