Devoir surveillé n° 7
CORRIGÉ

Exercice 1.

1. Comme $0+0=0+0=0$, $0_{\mathbb{R}^4}$ appartient à F. Donc F est non vide.
Soient $u=(x_1,y_1,z_1,t_1)$ et $v=(x_2,y_2,z_2,t_2)$ dans F et $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. Alors :
$$\lambda u+\mu v=(\underbrace{\lambda x_1+\mu x_2}_{x},\underbrace{\lambda y_1+\mu y_2}_{y},\underbrace{\lambda z_1+\mu z_2}_{z},\underbrace{\lambda t_1+\mu t_2}_{t}),$$
et :
$x-y=(\lambda x_1+\mu x_2)-(\lambda y_1+\mu y_2)=\lambda(x_1-y_1)+\mu(x_2-y_2)=0$,
$z-t=(\lambda z_1+\mu z_2)-(\lambda t_1+\mu t_2)=\lambda(z_1-t_1)+\mu(z_2-t_2)=0$,
donc $\lambda u+\mu v\in F$. Donc F est stable par combinaison linéaire.
Donc F est donc un sous-espace vectoriel de E.

2. Soit $u=(x,y,z,t)$ dans E. On a :
$$u\in F\cap G\Leftrightarrow x-y=z-t=x-z=y-t=0\Leftrightarrow x=y=z=t\Leftrightarrow u=(x,x,x,x)=x(1,1,1,1),$$
donc $F\cap G=\mathrm{Vect}\,((1,1,1,1))$. En particulier, F et G ne sont pas en somme directe, donc ne sont pas supplémentaires dans E.

3. (a) Comme $0-0=1-1=0$, $u\in G$, et comme $0-1\neq 0$, $u\notin F$, donc $u\in G\setminus F$.
Supposons qu'il existe $f=(a,a,b,b)\in F$ et $g=(c,d,c,d)\in G$ tels que $v=f+g$, alors : $\begin{cases} a+c &= 1\\ a+d &= 2\\ b+c &= 3\\ b+d &= 0\end{cases}$, donc $a+b+c+d=2+3=1+0$, ce qui est impossible. Donc $v\notin F+G$.

   (b) Soit (e_1,e_2) une base de F. Comme $u\in G\setminus F$, la famille (e_1,e_2,u) reste libre ; puis, comme $v\notin F+G$, la famille (e_1,e_2,u,v) est encore libre. Donc $F\cap H=\{0_E\}$.
Montrons d'autre part que $F+H=E$. Soient $w=(x,y,z,t)\in E$, $f=(a,a,b,b)\in F$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, on a :
$$\begin{aligned} w=f+\lambda u+\mu v &\Leftrightarrow \begin{cases} a+\mu &= x\\ a+\lambda+2\mu &= y\\ b+3\mu &= z\\ b+\lambda &= t\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a+\mu &= x\\ \lambda+\mu &= y-x\\ b+3\mu &= z\\ \lambda-3\mu &= t-z\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a+\mu &= x\\ \lambda &= -\frac{3}{4}(x-y)-\frac{1}{4}(z-t)\\ b+3\mu &= z\\ \mu &= -\frac{1}{4}(x-y)+\frac{1}{4}(z-t)\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a &= \frac{1}{4}(5x-y-z+t)\\ \lambda &= \frac{1}{4}(-3x+3y-z+t)\\ b &= \frac{1}{4}(3x-3y+z+3t)\\ \mu &= \frac{1}{4}(-x+y+z-t)\end{cases}, \end{aligned}$$

donc w admet une décomposition (unique) selon F et H. Donc $F + H = E$, donc F et H sont supplémentaires dans E.

4. D'après le résultat précédent, on a $w = (a, a, b, b) + \lambda u + \mu v$ avec $a = \dfrac{1}{4}(5 \times 0 - 1 + 2 - 5) = -1$, et de même $b = -5$, $\lambda = 0$, $\mu = 1$. Donc $w = \underbrace{(-1, -1, -5, -5)}_{\in F} + \underbrace{v}_{\in H}$.

Exercice 2.

1. (a) La fonction exponentielle est bien dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. D'après le théorème des accroissements finis : $e^{c_x} = \dfrac{e^x - e^0}{x}$, donc $c_x = \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)$.
On sait que $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$, donc $\dfrac{e^x - 1}{x} = 1 + \dfrac{x}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x)$.
Donc $c_x = \ln\left(1 + \dfrac{x}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x)\right) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{2}$, d'où $\dfrac{c_x}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$.

   (b) La fonction $\arctan$ est bien dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. D'après le théorème des accroissements finis : $\dfrac{1}{1+c_x^2} = \dfrac{\arctan(x) - \arctan(0)}{x}$, donc $c_x = \pm\sqrt{\dfrac{x}{\arctan(x)} - 1}$.
On a : $\arctan(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$, donc $\dfrac{x}{\arctan(x)} = \dfrac{1}{1 - \frac{x^2}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)} = 1 + \dfrac{x^2}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$.
Donc $c_x \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{\sqrt{3}}$, donc $\dfrac{c_x}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

2. (a) Soit $x \in I^*$. La fonction f est de classe C^n sur I. On peut donc lui appliquer la formule de Taylor-Young à l'ordre n entre 0 et x :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n),$$

donc

$$f'(c_x) = f'(0) + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^{n-1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{n-1}).$$

Donc $f'(c_x) - f'(0) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^{n-1}$.

   (b) La fonction f' est de classe C^{n-1} sur I. On peut donc lui appliquer la formule de Taylor-Young à l'ordre $n-1$ entre 0 et x :

$$f'(x) = f'(0) + \frac{f^{(n)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{n-1}),$$

donc $f'(x) - f'(0) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{f^{(n)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}$.

   (c) Comme $c_x \in]0, x[$, on a $c_x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Donc, d'après la question précédente :

$$f'(c_x) - f'(0) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{f^{(n)}(0)}{(n-1)!}c_x^{n-1}.$$

Comme d'autre part $f'(c_x) - f'(0) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^{n-1}$, on a :

$$\frac{f^{(n)}(0)}{(n-1)!}c_x^{n-1} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^{n-1},$$

d'où $c_x^{n-1} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^{n-1}}{n}$. Finalement : $\dfrac{c_x}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{n^{\frac{1}{n-1}}}$.

Exercice 3.

1. Soient $u = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$ et $v = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{array}{rcl} f(\lambda u + \mu v) & = & f\left(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2\right) \\ & = & (2(\lambda x_1 + \mu x_2) + (\lambda y_1 + \mu y_2) + (\lambda z_1 + \mu z_2), \\ & & (\lambda x_1 + \mu x_2) + 2(\lambda y_1 + \mu y_2) - (\lambda z_1 + \mu z_2), \\ & & (\lambda x_1 + \mu x_2) - (\lambda y_1 + \mu y_2) + 2(\lambda z_1 + \mu z_2)) \\ & = & \lambda\left(2x_1 + y_1 + z_1, x_1 + 2y_1 - z_1, x_1 - y_1 + 2z_1\right) \\ & & +\mu\left(2x_2 + y_2 + z_2, x_2 + 2y_2 - z_2, x_2 - y_2 + 2z_2\right) \\ & = & \lambda f(u) + \mu f(v), \end{array}$$

   donc $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est compatible avec la combinaison linéaire. Donc f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{array}{rcl} f \circ f(u) & = & f\left(2x + y + z, x + 2y - z, x - y + 2z\right) \\ & = & (2(2x + y + z) + (x + 2y - z) + (x - y + 2z), \\ & & (2x + y + z) + 2(x + 2y - z) - (x - y + 2z), \\ & & (2x + y + z) - (x + 2y - z) + 2(x - y + 2z)) \\ & = & (6x + 3y + 3z, 3x + 6y - 3z, 3x - 3y + 6z) \\ & = & 3f(u), \end{array}$$

   donc $f \circ f = 3f$.

3. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

   -
$$\begin{array}{rcl} u \in \mathrm{Ker}(f) & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} 2x + y + z & = & 0 \\ x + 2y - z & = & 0 \\ x - y + 2z & = & 0 \end{array}\right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} 2x + y + z & = & 0 \\ x + 2y - z & = & 0 \\ -3y + 3z & = & 0 \end{array}\right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} 0 & = & 0 \\ x & = & -z \\ y & = & z \end{array}\right. \\ & \Leftrightarrow & u = (-z, z, z) = z(-1, 1, 1) \end{array},$$

     donc la famille $((-1, 1, 1))$ est génératrice de $\mathrm{Ker}(f)$. Comme le vecteur $(-1, 1, 1)$ est non nul, cette famille est également libre, donc est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

   -
$$\begin{array}{rcl} f(u) & = & (2x + y + z, x + 2y - z, x - y + 2z) \\ & = & x(2, 1, 1) + y(1, 2, -1) + z(1, -1, 2), \end{array}$$

     où $(1, -1, 2) = (2, 1, 1) - (1, 2, -1)$, donc la famille $((2, 1, 1), (1, 2, -1))$ est génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. Comme les vecteurs $(2, 1, 1)$ et $(1, 2, -1)$ sont non colinéaires, cette famille est également libre, donc est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

4. D'après les calculs précédents : $p \circ p = \dfrac{f \circ f}{3 \times 3} = \dfrac{3f}{9} = \dfrac{f}{3} = p$, donc p est un projecteur de $\mathbb{R}^3$.
   Comme $\mathrm{Ker}p = \mathrm{Ker}f$ et $\mathrm{Im}p = \mathrm{Im}f$, p est le projecteur sur le plan $\mathrm{Vect}\left((2, 1, 1), (1, 2, -1)\right)$ parallèlement à la droite $\mathrm{Vect}\left((-1, 1, 1)\right)$.

Problème.

I. 1. On a directement $T_3(P_1) = P_1$ et $T_3(P_2) = X^3$, et :
$\varphi(P_1) = (X+X^2)^2 - 3(X+X^2) + 1 = X^4 + 2X^3 + X^2 - 3X^2 - 3X + 1 = X^4 + 2X^3 - 2X^2 - 3X + 1$,
$\varphi(P_2) = (X+X^2)^5 + (X+X^2)^3 = X^{10} + 5X^9 + 10X^8 + 10X^7 + 5X^6 + X^5 + X^6 + 3X^5 + 3X^4 + X^3 = X^{10} + 5X^9 + 10X^8 + 10X^7 + 6X^6 + 4X^5 + 3X^4 + X^3$.

2. i. Soit $P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$. Alors $T_n \circ T_n(P) = T_n\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = T_n(P)$, donc T_n est un projecteur.

ii. Soit $P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$. On a :

$$P \in \operatorname{Ker}(T_n) \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = 0_{\mathbb{R}[X]} \Leftrightarrow \forall k \leq n,\ a_k = 0 \Leftrightarrow P = \sum_{k=n+1}^{m} a_k X^k,$$

c'est-à-dire que $G = \operatorname{Ker}(T_n) = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \forall k \leq n,\ a_k = 0\}$.
De plus, $T_n(P) \in \mathbb{R}_n[X]$, donc $F = \operatorname{Im}(T_n) \subset \mathbb{R}_n[X]$, et : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ T_n(P) = P$, donc $P \in \operatorname{Im}(T_n)$. Donc $F = \operatorname{Im}(T_n) = \mathbb{R}_n[X]$. T_n est donc le projecteur sur F parallèlement à G.

3. i. Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors $\varphi(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(X + X^2) = \lambda P(X+X^2) + \mu Q(X+X^2) = \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q)$, donc φ est une application linéaire.

ii. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Notons $m = \deg P$, alors le terme dominant de P est de la forme $a_m X^m$ où $a_m \neq 0$. Le terme dominant de $\varphi(P)$ est alors celui de $a_m(X+X^2)^n$, c'est-à-dire $a_m X^{2m}$. Donc $\deg(\varphi(P)) = 2m = 2\deg(P)$.

iii. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Si $P \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$, alors $\deg(\varphi(P)) = 2\deg(P) \in \mathbb{N}$, donc $\varphi(P) \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$. Donc $\operatorname{Ker}(\varphi) = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$, donc φ est injective.
De plus, comme $\deg(\varphi(P))$ est nécessairement pair, X^3 n'a pas d'antécédent par φ. Donc φ n'est pas surjective.

II. 1. Comme $\varphi_n = T_n \circ \varphi$, φ_n est linéaire car composée d'applications linéaires. De plus, $\operatorname{Im}(\varphi_n) \subset \operatorname{Im}(T_n) \subset \mathbb{R}_n[X]$, donc φ_n est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. On a $\varphi(1) = 1$, donc $\varphi_4(1) = 1$,
$\varphi(X) = X^2 + X$, donc $\varphi_4(X) = X^2 + X$,
$\varphi(X^2) = X^4 + 2X^3 + X^2$, donc $\varphi_4(X^2) = X^4 + 2X^3 + X^2$,
$\varphi(X^3) = X^6 + 3X^5 + 3X^4 + X^3$, donc $\varphi_4(X^3) = 3X^4 + X^3$,
$\varphi(X^4) = X^8 + 4X^7 + 6X^6 + 4X^5 + X^4$, donc $\varphi_4(X^4) = X^4$.

3. Soit $P \in \mathbb{R}_4[X]$. On a $P \in \operatorname{Ker}(\varphi_4) \Leftrightarrow T_4(\varphi(P)) = 0_{\mathbb{R}[X]} \Leftrightarrow \varphi(P) = 0_{\mathbb{R}[X]} \Leftrightarrow P = 0_{\mathbb{R}[X]}$, d'après l'étude des noyaux de T_4 et φ. Donc φ_4 est injective.
On sait déjà que $1 = \varphi_4(1)$ et que $X^4 = \varphi_4(X^4)$. On en déduit que :
$X^3 = \varphi_4(X^3) - 3\varphi(X^4) = \varphi_4(X^3 - 3X^4)$, et :
$X^2 = \varphi_4(X^2) - \varphi_4(X^4) - 2\varphi_4(X^3 - 3X^4) = \varphi_4(5X^4 - 2X^3 + X^2)$, puis :
$X = \varphi_4(X) - \varphi_4(5X^4 - 2X^3 + X^2) = \varphi_4(-5X^4 + 2X^3 - X^2 + X)$.
Donc la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$ appartient à $\operatorname{Im}(\varphi_4)$, donc φ_4 est surjective.
Donc φ_4 est un automorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$.

Sa réciproque est déterminée par :

$$\varphi_4^{-1}(X^4) = X^4, \quad \varphi_4^{-1}(X^3) = -3X^4 + X^3, \quad \varphi_4^{-1}(X^2) = 5X^4 - 2X^3 + X^2,$$

$$\varphi_4^{-1}(X) = -5X^4 + 2X^3 - X^2 + X, \quad \varphi_4^{-1}(1) = 1.$$

III. 1. Par composition de développements limités, la fonction f admet un développement limité d'ordre n en 0, de partie régulière $\varphi_n(P)$.

2. La partie régulière du développement limité de $g : x \mapsto \ln(1+x)$ est $P = X - \dfrac{X^2}{2} + \dfrac{X^3}{3} - \dfrac{X^4}{4}$.
On a alors :

$$\begin{aligned}
\varphi_4(P) &= \varphi_4(X) - \frac{1}{2}\varphi_4(X^2) + \frac{1}{3}\varphi_4(X^3) - \frac{1}{4}\varphi_4(X^4) \\
&= (X^2 + X) - \frac{1}{2}(X^4 + 2X^3 + X^2) + \frac{1}{3}(3X^4 + X^3) - \frac{1}{4}X^4 \\
&= X + \frac{X^2}{2} - \frac{2}{3}X^3 + \frac{X^4}{4}.
\end{aligned}$$

On a donc : $f(x) = x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{x^4}{4} + \underset{x \to 0}{o}(x^4)$.

3. Le calcul est similaire.