

Feuille d'exercices 17

ÉLÉMENTS DE CORRECTION

Exercice 2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme la fonction \cos est de classe C^5 sur $[0, x]$ et 6 fois dérivable sur $]0, x[$, on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 5. D'après cette formule, il existe $c \in]0, x[$ tel que $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cos(c) \frac{x^6}{6!}$. Donc :

$$\left| \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} \right| = |\cos(c)| \left| \frac{x^6}{6!} \right| \leq \frac{x^6}{6!}$$

par encadrement de \cos (et en notant que $x^6 \geq 0$).

À 10^{-8} près, on a donc $\cos(0,1) \simeq 1 - \frac{0,1^2}{2!} + \frac{0,1^4}{4!} = 1 - 0,005 + \frac{10^{-4}}{24} = 0,99500417$.

Exercice 4. Soient $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On applique la formule de Taylor-Lagrange à la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ à l'ordre $2n$ entre 0 et x . Selon cette formule, il existe $c \in]0, x[$ tel que :

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} + f^{(2n+1)}(c) \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Or : $f^{(2n+1)}(c) = \frac{(2n)!}{(1+c)^{2n+1}} \in]0, (2n)![,$ d'où l'encadrement voulu.

Notons $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Dans l'encadrement précédent, avec $x = 1$, on a : $S_{2n} < \ln(2) < S_{2n+1}$. On peut montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes, donc la suite (S_n) est convergente, et par passage à la limite dans l'encadrement : $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(2)$.

Exercice 5. Soit $x \in I$. On note, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, P_k l'assertion :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^x \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k dt.$$

On raisonne par récurrence : P_0 est vraie (c'est le théorème fondamental de l'analyse).

Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, supposons P_k vraie. Alors, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k dt &= \left[-\frac{f^{(k+1)}(t)}{(k+1)!}(x-t)^{k+1} \right]_{x_0}^x + \int_{x_0}^x \frac{f^{(k+2)}(t)}{(k+1)!}(x-t)^{k+1} dt \\ &= \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1} + \int_{x_0}^x \frac{f^{(k+2)}(t)}{(k+1)!}(x-t)^{k+1} dt, \end{aligned}$$

donc P_{k+1} est vraie.

Par récurrence, P_n est donc vraie : c'est la *formule de Taylor avec reste intégral*.

Exercice 7. La fonction $f : x \mapsto x^\alpha$ est définie sur \mathbb{R}_+^* , et de classe C^∞ sur cet intervalle, avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x > 0, f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)x^{\alpha-n},$$

donc f^n est prolongeable par continuité en 0 si et seulement si $\alpha - n \geq 0$, c'est-à-dire $n \leq \lfloor \alpha \rfloor$.

La fonction f admet donc un développement limité en 0 jusqu'à l'ordre $\lfloor \alpha \rfloor$.

Exercice 8. On a $y = x - 2 \xrightarrow{x \rightarrow 2} 0$, donc :

- $e^x = e^{y+2} = e^2 e^y = e^2 \left(1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + o_{y \rightarrow 0}(y^3) \right) = e^2 + e^2(x-2) + \frac{e^2}{2}(x-2)^2 + \frac{e^2}{6}(x-2)^3 + o_{x \rightarrow 2}((x-2)^3)$,
- $\sqrt{1+x} = \sqrt{3+y} = \sqrt{3} \sqrt{1 + \frac{y}{3}} = \sqrt{3} \left(1 + \frac{y}{6} - \frac{y^2}{24} + \frac{y^3}{48} + o_{y \rightarrow 0}(y^3) \right) = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{6}(x-2) - \frac{\sqrt{3}}{72}(x-2)^2 + \frac{\sqrt{3}}{432}(x-2)^3 + o_{x \rightarrow 2}((x-2)^3)$,
- $\ln(1+x) = \ln(3+y) = \ln(3) + \ln\left(1 + \frac{y}{3}\right) = \ln(3) + \left(\frac{y}{3} - \frac{y^2}{6} + \frac{y^3}{9} + o_{y \rightarrow 0}(y^3) \right) = \ln(3) + \frac{1}{3}(x-2) - \frac{1}{18}(x-2)^2 + \frac{1}{81}(x-2)^3 + o_{x \rightarrow 2}((x-2)^3)$.

Exercice 9.

- (c) $\cos(x) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$,
- (d) $(1 - \operatorname{ch}(x)) \sin(x) = -\frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24} + o_{x \rightarrow 0}(x^6)$,
- (e) $\sqrt{1+x^2} \ln(1+x^3) = x^3 + \frac{x^5}{2} - \frac{x^6}{2} - \frac{x^7}{8} + o_{x \rightarrow 0}(x^8)$,
- (f) $\cos x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{1}{4\sqrt{3}} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \frac{1}{48} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4 - \frac{1}{80\sqrt{3}} \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^5 + o_{x \rightarrow 0} \left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^5 \right)$.

Exercice 10.

- (a) $\forall x \in]-1, 1[, \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + \dots + \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+1})$.
- (b) $\forall x \in]-1, 1[, \arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \dots + \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} x^{2n+1} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+2})$.
- (c) $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + \dots + \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+1})$,
donc $\operatorname{argsh}(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \dots + \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} x^{2n+1} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+2})$.

Exercice 11. On a $f(x) = \frac{1}{1+|x|^3} = 1 - |x|^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3) = 1 + x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$ si $x < 0$, $1 - x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$ si $x > 0$. La fonction f admet donc un DL_2 en 0 : $f(x) = 1 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$, mais, par unicité du DL, pour tout $n \geq 3$, f n'admet pas de DL_n en 0.

Exercice 12.

- (c) On pose $y = x - \frac{\pi}{4}$. Alors : $\tan(x) = \tan\left(y + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 + \tan(y)}{1 - \tan(y)} = \frac{1 + y + \frac{y^3}{3} + \frac{2}{15}y^5 + o_{y \rightarrow 0}(y^5)}{1 - y - \frac{y^3}{3} - \frac{2}{15}y^5 + o_{y \rightarrow 0}(y^5)} = \left(1 + y + \frac{y^3}{3} + \frac{2}{15}y^5 + o_{y \rightarrow 0}(y^5) \right) \left(1 + y + \frac{y^3}{3} + \frac{2}{15}y^5 + y^2 + \frac{2}{3}y^4 + y^3 + y^5 + y^4 + y^5 + o_{y \rightarrow 0}(y^5) \right) = 1 + 2y + 2y^2 + \frac{8}{3}y^3 + \frac{10}{3}y^4 + \frac{64}{15}y^5 + o_{y \rightarrow 0}(y^5) = 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{8}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{10}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4 + \frac{64}{15}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^5 + o_{y \rightarrow 0}\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^5\right)$,

- (d) $\frac{x \cos x}{\sin x} = 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} + o_{x \rightarrow 0}(x^4)$,
- (e) $\cos^3 x = 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{8}x^4 + o_{x \rightarrow 0}(x^5)$,
- (f) $\sqrt[3]{1 + \cos x} = \sqrt[3]{2} - \frac{x^2}{6 \times 2^{\frac{2}{3}}} + o_{x \rightarrow 0}(x^4)$,
- (g) $\ln(1 + \sin x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + o_{x \rightarrow 0}(x^4)$,
- (h) $e^{\sqrt{1+x}} = e + \frac{e}{2}x + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$,
- (i) $\cos(x)^{\sin(x)} = 1 - \frac{x^3}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^4)$,
- (j) $\sin(x - x^2) = x - x^2 - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^4)$,
- (k) $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o_{x \rightarrow 0}(x^5)$,
- (l) $\int_0^x e^{t^2} dt = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + o_{x \rightarrow 0}(x^5)$,
- (m) $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^5}{40} + o_{x \rightarrow 0}(x^5)$.

Exercice 13. La fonction arcsin est de classe C^∞ en 0, et d'après l'exercice 10 :

$$\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \dots + \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+2}).$$

D'après la formule de Taylor-Young, et par unicité du DL, on a donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\arcsin^{(2n)}(0) = 0$, et $\arcsin^{(2n+1)}(0) = (2n+1)! \times \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} = \left(\frac{(2n)!}{2^n n!}\right)^2 = (1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1))^2$.

Exercice 14.

- (b) $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^2 + \frac{2}{3}e^2x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \xrightarrow{x \rightarrow 0} e^2$,
- (c) $\frac{1}{x^2} - \cotan^2 x = \frac{2}{3} - \frac{x^2}{15} + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{2}{3}$,
- (d) $\frac{e^x}{\operatorname{sh} x} - \frac{e^{-x}}{\sin x} = 2 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 2$,
- (e) $\frac{1}{x^2} - \frac{2}{1 - \cos 2x} = -\frac{1}{3} - \frac{x^2}{15} + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{3}$,
- (f) $\frac{\tan x - \arcsin x}{\sin x - \arctan x} = 1 + \frac{3}{2}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$,
- (g) $\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+x}}{\ln(1+x)} = \frac{1}{6} + \frac{5}{72}x + o_{x \rightarrow 0}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{6}$,
- (h) $\frac{\sqrt{\sin x} - \sqrt{x}}{\sin \sqrt{x} - \sqrt{x}} = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{40} + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

Exercice 16.

(c) $f(x) = \frac{3 \ln(1+x) - \ln(1+x^3)}{3x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^3}{4} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$,

donc la courbe de f a pour tangente en 0 la droite d'équation $y = -\frac{x}{2} + 1$, et est au-dessus de cette tangente à gauche de 0 et en-dessous à droite de 0.

(d) $f(x) = x + 2\sqrt{x} - \sqrt{3+x} = 1 + \frac{7}{4}(x-1) - \frac{15}{64}(x-1)^2 + o_{x \rightarrow 1}((x-1)^2),$

donc la courbe de f a pour tangente en 1 la droite d'équation $y = 1 + \frac{7}{4}(x-1) = \frac{7}{4}x - \frac{3}{4},$ et est en-dessous de cette tangente au voisinage de 1.

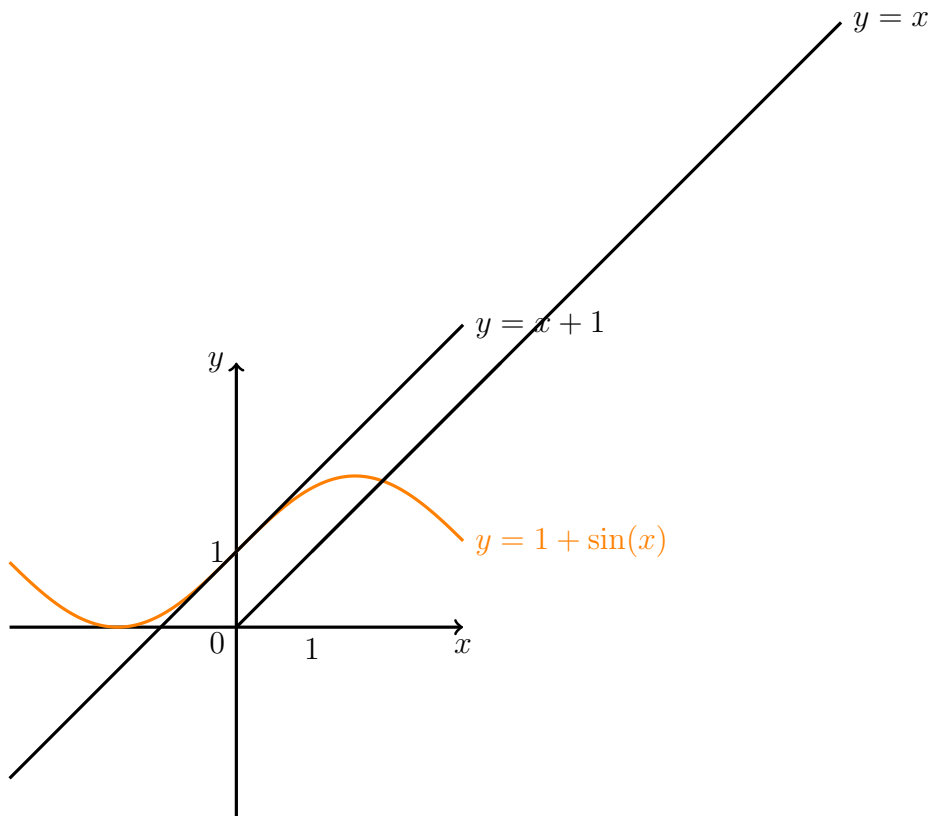
(e) $f(x) = \frac{\ln x}{x-1} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{3}(x-1)^2 + o_{x \rightarrow 1}((x-1)^2),$

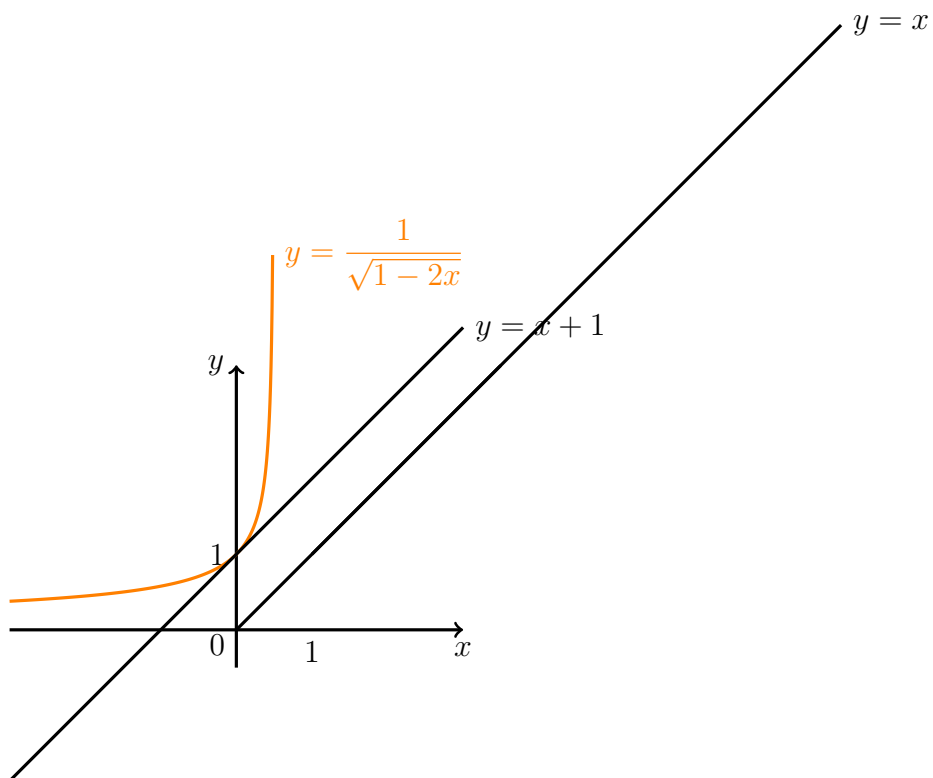
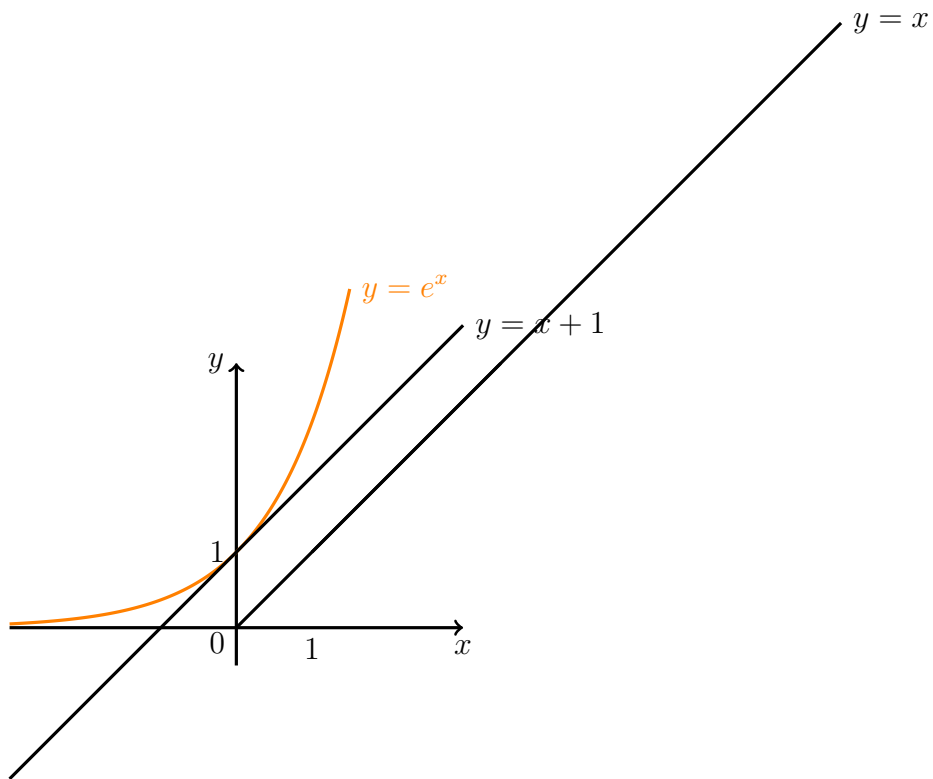
donc la courbe de f a pour tangente en 1 la droite d'équation $y = 1,$ et est au-dessus de cette tangente au voisinage de 1.

(f) $f(x) = x^\alpha = x_0^\alpha + \alpha x_0^{\alpha-1}(x-x_0) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x_0^{\alpha-2}(x-x_0)^2 + o_{x \rightarrow x_0}((x-x_0)^2),$

donc la courbe de f a pour tangente en x_0 la droite d'équation $y = \alpha x_0^{\alpha-1}(x-x_0) + x_0^\alpha,$ et est en-dessous de cette tangente au voisinage de x_0 si $\alpha \in [0, 1],$ au-dessus sinon.

Exercice 17.





Exercise 18.

(a) $x^{\frac{1}{4}}\sqrt{1+\sqrt{x}} = x^{\frac{1}{4}} + \frac{x^{\frac{3}{4}}}{2} - \frac{x^{\frac{5}{4}}}{8} + \frac{x^{\frac{7}{4}}}{16} + o_{x \rightarrow 0}(x^2),$

(b) $\sqrt{x+\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8\sqrt{x}} + \frac{1}{16x} + o_{x \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{x}\right),$

$$(c) \frac{1}{x + \ln x} = \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x^2} + \frac{\ln^2 x}{x^3} + o_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^3} \right).$$

Exercice 19.

$$(b) f(x) = (x^3 + x^2 + x + 1)^{\frac{1}{3}} = x + \frac{1}{3} + \frac{2}{9x} + o_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \right), \text{ donc la courbe de } f \text{ a pour asymptote en } +\infty$$

la droite d'équation $y = x + \frac{1}{3}$, et est au-dessus de cette asymptote au voisinage de $+\infty$.

$$(c) f(x) = \ln(e^{x^2} - e^x - 1) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2, \text{ donc la courbe de } f \text{ n'a pas d'asymptote en } +\infty.$$

Exercice 20.

(a) La fonction f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* , avec : $\forall x > 0, f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$, donc f est continue et strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* . D'après le théorème de la bijection monotone, f réalise donc une bijection de \mathbb{R}_+^* dans $f(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$.

(b) Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}$ tels que $y = f(x)$. Alors $x = f^{-1}(y) \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} +\infty$, et : $f(x) = x + \ln x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$, c'est-à-dire $x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} y$, c'est-à-dire $f^{-1}(y) \underset{y \rightarrow +\infty}{\sim} y$.

(c) On a :

$$f^{-1}(y) - y = x - f(x) = -\ln(x) \underset{y \rightarrow +\infty}{\sim} -\ln y,$$

puis :

$$\begin{aligned} f^{-1}(y) - y + \ln y &= x - f(x) + \ln f(x) \\ &= -\ln x + \ln(x + \ln x) \\ &= \ln \left(1 + \frac{\ln x}{x} \right) \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x} \\ &\underset{y \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln y}{y}. \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$f^{-1}(y) = y - \ln y + \frac{\ln y}{y} + o_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln y}{y} \right).$$