

Devoir surveillé n° 6

Durée : 3 heures. Calculatrices non autorisées.

La notation tiendra largement compte de la qualité de la rédaction.

Les résultats doivent être encadrés. Il est inutile de recopier l'énoncé.

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre souhaité.

Les exercices qui ne sont pas traités dans l'ordre doivent être rédigés sur des copies séparées.

Le sujet et le brouillon ne sont pas à rendre. Le barème est indicatif.

Exercice 1. (8 points) On cherche les fonctions continues $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y)f(x-y) = f(x)^2 f(y)^2.$$

1. Montrer si f n'est pas la fonction nulle, alors $f(0) = 1$ ou -1 . On suppose dans la suite que $f(0) = 1$.
2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On suppose que $f(x) = 0$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, f\left(\frac{x}{2^n}\right) = 0$.
(b) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$.
3. On pose $\varphi = \ln \circ f$, et $\lambda = \varphi(1)$.
(a) Montrer que φ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
(b) Montrer que : $\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}, \varphi(nx) = n^2 \varphi(x)$.
(c) Soit $x \in \mathbb{Q}$ de dénominateur $q \in \mathbb{N}^*$. En calculant $\varphi(qx)$ de deux manières, montrer que : $\varphi(x) = \lambda x^2$.
(d) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \lambda x^2$.
4. Conclure.

Exercice 2. (6 points) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. On va montrer que f' vérifie la *propriété des valeurs intermédiaires*, c'est-à-dire que pour tout $(a, b) \in I^2$, f' atteint toutes les valeurs entre $f'(a)$ et $f'(b)$:

$$\forall y \in [f'(a), f'(b)], \exists c \in [a, b], f'(c) = y.$$

1. Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$, mais dont la dérivée n'est pas continue.
2. Soit $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$, et soit $\tau_a : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in [a, b], \tau_a(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si } x \neq a \\ f'(a) & \text{si } x = a \end{cases}$.
(a) Montrer que toute valeur de τ_a est atteinte par f' sur $[a, b]$.
(b) Montrer que la fonction τ_a est continue. En déduire que toutes les valeurs entre $f'(a)$ et $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ sont atteintes par f' sur $[a, b]$.
(c) En déduire que f' atteint toutes les valeurs entre $f'(a)$ et $f'(b)$.

Exercice 3. (6 points) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère le polynôme

$$P = nX^n - X^{n-1} - X^{n-2} - \dots - X - 1.$$

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ de module ≥ 1 . Montrer que $|1 + z + \dots + z^{n-1}| \leq n|z|^n$.
2. En déduire que P n'admet que des racines de module < 1 , excepté 1.
3. Déterminer les racines de Q' où $Q = (X - 1)P$. En déduire que toutes les racines de P sont simples.
4. P admet-il une racine réelle autre que 1 ?

Problème. (12 points)

I. On considère $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{x}{(1+x)^2} \end{cases}$.

1. Justifier que f est de classe C^∞ , et calculer f' et f'' .
2. En déduire $f^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$ s'annule exactement une fois.

II. Soient a un réel et $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, +\infty[$, dérivable sur $]a, +\infty[$, telle que $f(a) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. On veut montrer que f' s'annule sur $]a, +\infty[$.

On note $h = f \circ \tan$, définie sur $\left[\arctan(a), \frac{\pi}{2}\right[$.

1. Montrer que h est prolongeable par continuité en $\frac{\pi}{2}$.
2. Montrer qu'il existe $c \in \left]\arctan(a), \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $h'(c) = 0$.
3. En déduire qu'il existe $\alpha \in]a, +\infty[$ tel que $f'(\alpha) = 0$.

III. Soient b un réel et $g : [b, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur $[b, +\infty[$ telle que $g(b) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$. On veut montrer que g' et g'' s'annulent sur $]b, +\infty[$.

1. Justifier qu'il existe $\beta \in]b, +\infty[$ tel que $g'(\beta) = 0$.
2. Soit $x \geq b$. Montrer qu'il existe $d_x \in]x, x + 1[$ tel que $g'(d_x) = g(x + 1) - g(x)$.
3. On suppose que g' est monotone au voisinage de $+\infty$.
 - i. Justifier que g' admet une limite en $+\infty$.
 - ii. Montrer que cette limite est nulle.
 - iii. En déduire qu'il existe $\gamma \in]b, +\infty[$ tel que $g''(\gamma) = 0$.
4. On suppose que g' n'est monotone sur aucun voisinage de $+\infty$.
 - i. Justifier qu'il existe x_1, x_2 strictement supérieurs à β tels que $g''(x_1)$ et $g''(x_2)$ sont de signes distincts.
 - ii. En déduire qu'il existe $\gamma \in]b, +\infty[$ tel que $g''(\gamma) = 0$.
5. Conclusion. Peut-on généraliser ce résultat ?