

Devoir à la maison n° 10

Exercice 1. On cherche les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y) + xy.$$

Soit f une telle fonction.

1. Calculer $f(0)$. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x) + x^2$.
2. En déduire que : $\forall (x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}, f(nx) = nf(x) - \frac{1}{2}nx^2 + \frac{1}{2}n^2x^2$.
3. En déduire que : $\forall x \in \mathbb{Q}, f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + f(1)x$.
4. En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \lambda x$.
5. Conclure.

Exercice 2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Soient $a < b$ dans I .

On rappelle que le théorème des accroissements finis appliqué à f entre a et b est *non constructif* : en effet, d'après ce théorème,

$$\exists c \in]a, b[, \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c),$$

mais le théorème ne dit rien sur la valeur de c .

On admet que c est unique si et seulement si f ou $-f$ est strictement convexe.

1. Montrer que si f est une fonction polynomiale de degré 2, alors $c = \frac{a+b}{2}$.
2. Que vaut c si $a, b > 0$ et si f est la fonction inverse ?
3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ . On suppose que : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, c = \frac{a+b}{2}$.
 - (a) Montrer que : $\forall (x, h) \in \mathbb{R}^2, f(x+h) - f(x) = hf' \left(x + \frac{h}{2} \right)$.
 - (b) En dérivant cette égalité par rapport à h trois fois, montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f^{(3)}(x) = 0$.
 - (c) Conclure.