

## Devoir à la maison n° 9

### CORRIGÉ

#### Exercice 1.

1. Soit  $(x, \alpha) \in \mathbb{C}^2$ , notons  $z = x + \alpha$ . On a :

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 + cx + d &= a(z - \alpha)^3 + b(z - \alpha)^2 + c(z - \alpha) + d \\ &= az^3 + (b - 3a\alpha)z^2 + (c - 2b\alpha + 3a\alpha^2)z + (d - c\alpha + b\alpha^2 - a\alpha^3), \end{aligned}$$

donc

$$(E) \Leftrightarrow z^3 + \left(\frac{b}{a} - 3\alpha\right)z^2 + \left(\frac{c}{a} - 2\frac{b}{a}\alpha + 3\alpha^2\right)z + \left(\frac{d}{a} - \frac{c}{a}\alpha + \frac{b}{a}\alpha^2 - \alpha^3\right) = 0.$$

D'où l'expression voulue en choisissant  $\alpha$  tel que  $\frac{b}{a} - 3\alpha = 0$ , c'est-à-dire  $\alpha = \frac{b}{3a}$ , puis en notant

$$p = \frac{c}{a} - 2\frac{b}{a}\alpha + 3\alpha^2 = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2} \text{ et } q = \frac{d}{a} - \frac{c}{a}\alpha + \frac{b}{a}\alpha^2 - \alpha^3 = \frac{d}{a} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{2b^3}{27a^3}.$$

2. On a :

$$\begin{aligned} z^3 + pz + q &= (u + v)^3 + p(u + v) + q \\ &= u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 + p(u + v) + q \\ &= u^3 + v^3 + (u + v)(3uv + p) + q \\ &= u^3 + v^3 + q, \end{aligned}$$

donc  $u^3 + v^3 = -q$  et  $u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}$ . D'après les relations coefficients-racines vues en cours,  $u^3$  et  $v^3$

sont donc bien les racines de  $X^2 + qX - \frac{p^3}{27}$ . On sait déterminer ces racines ; on peut donc déterminer  $u$  et  $v$  (trois solutions possibles), puis les solutions de l'équation  $(E')$ , puis celles de  $(E)$  : on a donc une méthode de résolution par radicaux des équations de degré 3.

*Cette méthode fut découverte par Niccolò Fontana Tartaglia dans la nuit du 12 au 13 février 1535.*

3. On a  $a = 1$ ,  $b = 3$ ,  $c = 1$  et  $d = -5$ , donc  $\alpha = 1$ ,  $p = -2$  et  $q = -4$ . Le polynôme  $X^2 - 4X + \frac{8}{27}$  a pour discriminant  $\Delta = 16 - \frac{32}{27} = \frac{16 \times 25}{27}$ , donc a pour racines  $2 \pm \frac{10}{3\sqrt{3}}$ .

Or  $\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 = 2 + \frac{10}{3\sqrt{3}}$ , et de même  $\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 = 2 - \frac{10}{3\sqrt{3}}$ , donc  $u = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\omega$  et  $v = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\omega'$ , où  $\omega, \omega'$  sont des racines 3<sup>èmes</sup> de l'unité :  $(\omega, \omega') \in \{1, j, \bar{j}\}^2$ . Comme  $uv = \frac{2}{3}$ , on a  $(\omega, \omega') = (1, 1), (j, \bar{j})$  ou  $(\bar{j}, j)$ .

Donc  $z = u + v = 2, -1 + i$  ou  $-1 - i$  ; donc, comme  $x = z - \alpha = z - 1$  :

$$S = \{1, -2 + i, -2 - i\}.$$

4. (a) Soit  $(x, \alpha) \in \mathbb{C}^2$ , notons  $z = x + \alpha$ . On a :

$$\begin{aligned} ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e &= a(z - \alpha)^4 + b(z - \alpha)^3 + c(z - \alpha)^2 + d(z - \alpha) + e \\ &= az^4 + (b - 4a\alpha)z^3 + (c - 3b\alpha + 6a\alpha^2)z^2 \\ &\quad + (d - 2c\alpha + 3b\alpha^2 - 4a\alpha^3)z + (e - d\alpha + c\alpha^2 - b\alpha^3 + a\alpha^4), \end{aligned}$$

donc

$$(F) \Leftrightarrow z^4 + \left(\frac{b}{a} - 4\alpha\right)z^3 + \left(\frac{c}{a} - 3\frac{b}{a}\alpha + 6\alpha^2\right)z^2 + \left(\frac{d}{a} - 2\frac{c}{a}\alpha + 3\frac{b}{a}\alpha^2 - 4\alpha^3\right)z + \left(\frac{e}{a} - \frac{d}{a}\alpha + \frac{c}{a}\alpha^2 - \frac{b}{a}\alpha^3 + \alpha^4\right) = 0.$$

D'où l'expression voulue en choisissant  $\alpha$  tel que  $\frac{b}{a} - 4\alpha = 0$ , c'est-à-dire  $\alpha = \frac{b}{4a}$ , puis en

$$\text{notant } p = \frac{c}{a} - 3\frac{b}{a}\alpha + 6\alpha^2 = \frac{c}{a} - \frac{3b^2}{8a^2}, \quad q = \frac{d}{a} - 2\frac{c}{a}\alpha + 3\frac{b}{a}\alpha^2 - 4\alpha^3 = \frac{d}{a} - \frac{bc}{2a^2} + \frac{b^3}{8a^3}$$

$$\text{et } r = \frac{e}{a} - \frac{d}{a}\alpha + \frac{c}{a}\alpha^2 - \frac{b}{a}\alpha^3 + \alpha^4 = \frac{e}{a} - \frac{bd}{4a^2} + \frac{b^2c}{16a^3} - \frac{3b^4}{256a^4}.$$

(b) Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ . On a directement :  $(X^2 + \lambda)^2 - 2\lambda X^2 - \lambda^2 = X^4 + 2\lambda X^2 + \lambda^2 - 2\lambda X^2 - \lambda^2 = X^4$ .

(c) D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} P(X) &= (X^2 + \lambda)^2 - 2\lambda X^2 - \lambda^2 + pX^2 + qX + r \\ &= (X^2 + \lambda)^2 - ((2\lambda - p)X^2 - qX + (\lambda^2 - r)) , \\ &= (X^2 + \lambda)^2 - L(X) \end{aligned}$$

où le polynôme  $L$  a pour discriminant  $\Delta = q^2 - 4(2\lambda - p)(\lambda^2 - r) = R(\lambda)$ . Donc, si  $R(\lambda) = 0$ , alors  $L$  admet une racine double, donc est de la forme  $Q^2$ , où  $Q \in \mathbb{C}_1[X]$ .

On a alors  $P(X) = (X^2 + \lambda - Q(X))(X^2 + \lambda + Q(X))$ , où les deux facteurs sont de degré 2.

On sait déterminer leurs racines, donc les racines de  $P$ , puis les solutions de l'équation (F) : on a donc une méthode de résolution par radicaux des équations de degré 4.

*Cette méthode fut découverte par Ludovico Ferrari en 1540.*

*Les méthodes de Tartaglia et de Ferrari furent toutes deux publiées par Jérôme Cardan en 1545.*

(d) On a  $a = 1, b = 8, c = 18, d = 16$  et  $e = 7$ , donc  $\alpha = 2, p = -6, q = 8$  et  $r = -1$ .

On a donc  $R(X) = 8X^3 + 24X^2 + 8X - 40 = 8(X^3 + 3X^2 + X - 5)$ .

D'après la question 3,  $\lambda = 1$  est une racine de  $R$ , donc

$$\begin{aligned} P(X) &= (X^2 + 1)^2 - (8X^2 - 8X + 2) \\ &= (X^2 + 1)^2 - 2(2X - 1)^2 \\ &= (X^2 + 2\sqrt{2}X + 1 - \sqrt{2})(X^2 - 2\sqrt{2}X + 1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Le premier facteur a pour discriminant  $\Delta_1 = 8 - 4(1 - \sqrt{2}) = 4 + 4\sqrt{2}$ , donc pour racines  $-\sqrt{2} \pm \sqrt{1 + \sqrt{2}}$ .

Le second facteur a pour discriminant  $\Delta_2 = 8 - 4(1 + \sqrt{2}) = 4 - 4\sqrt{2}$ , donc pour racines  $\sqrt{2} \pm i\sqrt{\sqrt{2} - 1}$ .

Finalement, comme  $x = z - \alpha = z - 2$  :

$$S = \left\{ -2 - \sqrt{2} - \sqrt{1 + \sqrt{2}}, -2 - \sqrt{2} + \sqrt{1 + \sqrt{2}}, -2 + \sqrt{2} - i\sqrt{\sqrt{2} - 1}, -2 + \sqrt{2} + i\sqrt{\sqrt{2} - 1} \right\}.$$

**Exercice 2.**

1. La fonction  $g$  est définie pour  $x$  tel que  $x \in [0, 1]$  et  $x + \frac{1}{n} \in [0, 1]$ , donc sur  $\left[0, \frac{n-1}{n}\right]$ .
2. Si  $c$  n'existe pas, alors  $g$  ne s'annule pas. Comme  $g$  est continue,  $g$  est donc de signe constant d'après la contraposée du théorème des valeurs intermédiaires.
3. Supposons  $g$  strictement positive. Alors :  $\forall x \in \left[0, \frac{n-1}{n}\right]$ ,  $f(x) > f\left(x + \frac{1}{n}\right)$ , donc :

$$f(0) > f\left(\frac{1}{n}\right) > f\left(\frac{2}{n}\right) > \dots > f(1).$$

Il y a contradiction, donc  $g$  n'est pas strictement positive, et de même  $g$  ne peut pas être strictement négative. D'après la question précédente,  $c$  existe donc.

*Le résultat ainsi démontré, appelé lemme des cordes, est dû à Paul Lévy (1886-1971).*

4. Dans cette application,  $x$  représente le temps et  $f(x)$  la distance parcourue ; pour être dans le cadre de l'énoncé prouvé ci-dessus, on pose plus précisément  $x = \frac{\text{temps } t \text{ en minutes}}{30 \text{ minutes}}$  et :  $\forall x \in [0, 1]$ ,  $f(x) =$   
 (distance parcourue au temps  $t$ )  
 – (distance qui serait parcourue au temps  $t$  à la vitesse constante  $v = 20\text{km/h}$ ).  
 On a ainsi  $f(0) = f(1) = 0$ , et la fonction  $f$  est continue sur  $[0, 1]$ . Posons  $n = 10$ , il existe d'après le lemme des cordes  $c \in \left[0, \frac{9}{10}\right]$  tel que  $f(c) = f\left(c + \frac{1}{10}\right)$ . Notons  $t_0, t_1$  et  $d_0, d_1$  les temps et distances correspondant respectivement à  $x = c$  et  $x = c + \frac{1}{10}$ . On a bien alors  $t_1 - t_0 = 3\text{mn}$ , et  $d_0 - vt_0 = d_1 - vt_1$ , c'est-à-dire  $d_1 - d_0 = v(t_1 - t_0) = 1\text{km}$ .