

Feuille d'exercices 12

ÉLÉMENTS DE CORRECTION

Exercice 1.

(b) Si $P = 0$, alors P est solution.

Supposons qu'il existe $P \neq 0$ tel que $P \circ P = P$. Notons $n = \deg(P)$. Alors $n^2 = n$, donc $n = 0$ ou 1. On note alors $P = aX + b$.

Alors $P \circ P = a(aX + b) + b = a^2X + (ab + b)$, donc $a^2 = a$ et $(a + 1)b = b$.

Donc $a = 0$ et b est quelconque, ou $a = 1$ et $b = 0$. Donc $P = b$ ou $P = X$.

Donc $S = \mathbb{K}_0[X] \cup \{X\}$.

Exercice 2.

(c) Notons $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. Le terme dominant de $(X^2 + 1)P''$ est alors $n(n-1)a_n X^n$, tandis que celui de $6P$ est $6a_n X^n$. Par identification, et comme $a_n \neq 0$, on a $n = 3$. Notons donc :

$$P = aX^3 + bX^2 + cX + d,$$

alors $P'' = 6aX + 2b$, donc $(X^2 + 1)P''(X) - 6P(X) = 0 \Leftrightarrow (b = 3d, a = c, 2b = 6b) \Leftrightarrow (b = d = 0, a = c) \Leftrightarrow P = a(X^3 + X)$. On a donc :

$$S = \{a(X^3 + X) \mid a \in \mathbb{C}\}.$$

Exercice 3.

(d) Après calcul : $P = (X^2 + (1+i)X + 1-i)Q + 0$. En particulier, Q divise P .

Exercice 5. Notons R le reste recherché. On a $\deg(R) < \deg(X^2 + 1) = 2$, donc $\deg(R) \leq 1$. On note alors $R = aX + b$.

Notons $P = (\cos \theta + X \sin \theta)^n$. On a donc $P = (X^2 + 1)Q + R$.

L'évaluation de cette égalité en $X = \pm i$ s'écrit :

- $e^{in\theta} = ai + b$,
- $e^{-in\theta} = -ai + b$,

d'où $b = \cos n\theta$ et $a = \sin n\theta$. Donc $R = \sin(n\theta)X + \cos(n\theta)$.

Exercice 7. Notons $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, et notons $Q = P - X$. On a :

$$\begin{aligned} P \circ P &= \sum_{k=0}^n a_k P^k \\ &= \sum_{k=0}^n a_k (Q + X)^k \\ &= Q \times T + \sum_{k=0}^n a_k X^k \\ &= Q \times T + P \end{aligned}$$

pour un certain $T \in \mathbb{K}[X]$, donc : $P \circ P - X = Q \times T + Q = Q(T + 1)$. Donc Q divise $P \circ P - X$.

Exercice 10.

- (b) • Montrons que D est injective. Soient $Q_1, Q_2 \in E$ tels que $D(Q_1) = D(Q_2)$. Alors $Q'_1 = Q'_2$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Q_1 = Q_2 + \lambda$. Alors $\int_0^1 Q_1(t)dt = \int_0^1 Q_2(t)dt + \int_0^1 \lambda dt$ donc, comme $Q_1, Q_2 \in E$, $\lambda = 0$. Donc $Q_1 = Q_2$. Donc D est injective.
- Montrons que D est surjective. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, on cherche $Q \in E$ tel que $D(Q) = P$, c'est-à-dire tel que $Q' = P$. D'après l'exercice 9, il existe $Q'_0 \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q'_0 = P$. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$, on a : $Q' = P \Leftrightarrow Q' = Q'_0 \Leftrightarrow Q = Q_0 + \lambda$, puis : $Q_0 + \lambda \in E \Leftrightarrow \int_0^1 Q_0(t)dt + \int_0^1 \lambda dt = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\int_0^1 Q_0(t)dt$. Donc $Q = Q_0 - \int_0^1 Q_0(t)dt$ convient. Donc D est surjective.
- Donc D est bijective.

Exercice 12.

- (c) Notons $P = (X + 1)^n - (X - 1)^n$. On cherche les racines de P . Soit $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
 (z + 1)^n - (z - 1)^n &= 0 \Leftrightarrow (z + 1)^n = (z - 1)^n \\
 &\Leftrightarrow z + 1 = e^{i\frac{2k\pi}{n}}(z - 1), \quad k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \\
 &\Leftrightarrow z = \frac{e^{i\frac{2k\pi}{n}} + 1}{e^{i\frac{2k\pi}{n}} - 1}, \quad k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \\
 &= \frac{e^{i\frac{k\pi}{n}} + e^{-i\frac{k\pi}{n}}}{e^{i\frac{k\pi}{n}} - e^{-i\frac{k\pi}{n}}} \\
 &= \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \\
 &= -i \cotan\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket.
 \end{aligned}$$

Or P est de degré $n - 1$, donc les racines de P sont simples ; et son coefficient dominant vaut $2n$, donc :

$$P = 2n \prod_{k=1}^{n-1} \left(X + i \cotan\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right).$$

Exercice 15. On raisonne par analyse-synthèse : supposons qu'il existe P solution.

On sait que $P(0) = 0$, puis en évaluant en $X = 0$: $P(1) = 1$; puis en évaluant en $X = 1$: $P(2) = 2$; puis en évaluant en $X = 5$: $P(5) = 5$.

Généralisons ce processus : notons $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + 1$. Par une récurrence aisée, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(u_n) = u_n$.

Le polynôme $Q = P(X) - X$ a donc pour racines tous les termes de la suite (u_n) . Comme celle-ci est strictement croissante (le vérifier !), Q a donc une infinité de racines, donc $Q = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Donc $P = X$.

Réciproquement, $P = X$ est solution.

Finalement :

$$S = \{X\}.$$

Exercice 17. Raisonnons par analyse-synthèse. Soit P solution. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q' = P$, alors :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, Q(k+1) - Q(k) = k + 1,$$

donc le polynôme $T = Q(X+1) - Q(X) - X - 1$ a tous les entiers pour racines, donc une infinité de racines. Donc $T = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Donc :

$$Q(X+1) - Q(X) = X + 1.$$

En dérivant cette égalité, on obtient : $P(X+1) - P(X) = 1$, puis en redérivant : $P'(X+1) - P'(X) = 0$.
En évaluant cette égalité en tout $k \in \mathbb{N}$, on a par une récurrence immédiate :

$$\forall k \in \mathbb{N}, P'(k) = P'(0),$$

donc le polynôme $P'(X) - P'(0)$ a tous les entiers naturels pour racines, donc est le polynôme nul. Donc P' est un polynôme constant, donc $P \in \mathbb{R}_1[X]$. Il existe donc $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$P = \lambda X + \mu.$$

Comme $P(X+1) = P(X) + 1$, on a $\lambda(X+1) + \mu = \lambda X + \mu + 1$, donc $\lambda + \mu = \mu + 1$, donc $\lambda = 1$, donc :

$$P = X + \mu.$$

Alors $Q = \frac{1}{2}X^2 + \mu X + \nu$; comme $Q(X+1) = Q(X) + X + 1$, on a $\frac{1}{2}(X+1)^2 + \mu(X+1) + \nu = \frac{1}{2}X^2 + \mu X + \nu + X + 1$, donc $\frac{1}{2} + \mu + \nu = \nu + 1$, donc $\mu = \frac{1}{2}$. Donc :

$$P = X + \frac{1}{2}.$$

Réciproquement, ce polynôme est solution. Finalement :

$$S = \left\{ X + \frac{1}{2} \right\}.$$

Exercice 19.

(a) On note $P = \alpha \prod_{k=1}^n (X - r_k)$. Alors $P' = \alpha \sum_{k=1}^n \prod_{j \neq k} (X - r_j)$, donc :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^n \frac{\prod_{j \neq k} (X - r_j)}{\prod_{j=1}^n (X - r_j)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{X - r_k}.$$

(b) On note $P = \alpha \prod_{k=1}^m (X - r_k)^{\alpha_k}$. Alors $P' = \alpha \sum_{k=1}^m \alpha_k (X - r_k)^{\alpha_k - 1} \prod_{j \neq k} (X - r_j)^{\alpha_j}$, donc :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^m \frac{\alpha_k (X - r_k)^{\alpha_k - 1} \prod_{j \neq k} (X - r_j)^{\alpha_j}}{\prod_{j=1}^m (X - r_j)^{\alpha_j}} = \sum_{k=1}^m \frac{\alpha_k}{X - r_k}.$$