

Devoir surveillé n° 5

Durée : 3 heures. Calculatrices non autorisées.

La notation tiendra largement compte de la qualité de la rédaction.

Les résultats doivent être encadrés. Il est inutile de recopier l'énoncé.

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre souhaité.

Les exercices qui ne sont pas traités dans l'ordre doivent être rédigés sur des copies séparées.

Le sujet et le brouillon ne sont pas à rendre. Le barème est indicatif.

Exercice 1. (6 points) On souhaite calculer les puissances successives de la matrice $M = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

1. On pose $A = \frac{1}{4}(M - I_3)$. Calculer A^2 et A^3 , et en déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = I_3 + u_n A$, où $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 4 - 3u_n$.
3. Calculer u_n en fonction de n . En déduire M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que M est inversible, et calculer son inverse. L'expression trouvée pour M^n est-elle valable pour $n = -1$?

Exercice 2. (6 points) On veut déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $Q = P(2X) - 2P(X)^2 + 1$ soit divisible par X^3 .

1. Montrer que $P \in \mathbb{R}[X]$ est solution si et seulement si : $\forall k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$, $Q^{(k)}(0) = 0$.
2. Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $Q^{(k)}(X)$, puis $Q^{(k)}(0)$, en fonction des dérivées de P . On utilisera la formule de Leibniz.
3. Déterminer les valeurs possibles, lorsque P est solution, de $P(0)$, $P'(0)$, $P''(0)$.
4. En utilisant la formule de Taylor, conclure.

Exercice 3. (6 points) On considère, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^3 + nx + n \end{cases}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f_n(x) = 0$ a exactement une solution. On l'appelle u_n .
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq u_n \leq 0$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $f_{n+1}(u_n)$. En déduire que (u_n) est décroissante.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers -1 .
5. Montrer que $u_n + 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
6. Montrer que $u_n = -1 + \frac{1}{n} + \frac{\alpha}{n^2} + \underset{n \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$ à déterminer.

Problème. (12 points)

On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$u_0 > 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n^2}.$$

- I. 1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
2. Montrer que la suite (u_n) est monotone.
3. Montrer que la suite (u_n) est convergente, et déterminer sa limite.
- II. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$.
1. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer v_n en fonction de u_n uniquement.
2. Montrer que la suite (v_n) est monotone et converge vers 2.
- III. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $w_n = \frac{v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}}{n}$.
1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_{n+1} - w_n = \frac{1}{n(n+1)} ((v_n - v_0) + (v_n - v_1) + \cdots + (v_n - v_{n-1}))$.
En déduire que la suite (w_n) est décroissante.
2. Montrer que la suite (w_n) converge vers un réel $l \geq 2$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2w_{2n} - w_n \leq v_n$. En déduire que $l \leq 2$, puis que $l = 2$.
- IV. 1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer w_n en fonction de u_n, u_0 et n .
2. Montrer que (nu_n^2) converge vers $\frac{1}{2}$.
3. Déterminer $\alpha > 0$ tel que la suite de terme général $n^\alpha(u_{n+1} - u_n)$ converge vers une limite non nulle. Déterminer cette limite.