

Devoir à la maison n° 9

Exercice 1. On veut résoudre l'équation du troisième degré, d'inconnue $x \in \mathbb{C}$:

$$(E) : \quad ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

où $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$, avec $a \neq 0$.

1. Déterminer $(\alpha, p, q) \in \mathbb{C}^3$ tels qu'avec le changement de variable $z = x + \alpha$, l'équation (E) soit équivalente à une équation de la forme

$$(E') : z^3 + pz + q = 0.$$

2. Dans l'équation (E') , on pose $z = u + v$, où $(u, v) \in \mathbb{C}^2$ vérifient $uv = -\frac{p}{3}$.

Montrer que u^3 et v^3 sont les racines complexes du polynôme $X^2 + qX - \frac{p^3}{27}$. Conclure.

3. Appliquer cette méthode à l'équation $x^3 + 3x^2 + x - 5 = 0$.

Indication : On pourra montrer l'égalité $\sqrt[3]{2 + \frac{10}{3\sqrt{3}}} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$.

4. (*Facultatif*)

On utilise cette méthode pour résoudre l'équation du quatrième degré, d'inconnue $x \in \mathbb{C}$:

$$(F) : \quad ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0,$$

où $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{C}^5$, avec $a \neq 0$.

- (a) Déterminer $(\alpha, p, q, r) \in \mathbb{C}^4$ tels qu'avec le changement de variable $z = x + \alpha$, l'équation (F) soit équivalente à une équation de la forme

$$P(z) = z^4 + pz^2 + qz + r = 0.$$

- (b) Montrer que : $\forall \lambda \in \mathbb{C}, X^4 = (X^2 + \lambda)^2 - 2\lambda X^2 - \lambda^2$.

- (c) On pose $R(X) = 8X^3 - 4pX^2 - 8rX + 4rp - q^2$.

Montrer que, si λ est racine de R , alors $P(X) = (X^2 + \lambda)^2 - Q(X)^2$, où $Q \in \mathbb{C}_1[X]$. Conclure.

- (d) Appliquer cette méthode à l'équation $x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 16x + 7 = 0$.

Exercice 2. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, telle que $f(0) = f(1)$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On veut montrer qu'il existe $c \in \left[0, \frac{n-1}{n}\right]$ tel que :

$$f(c) = f\left(c + \frac{1}{n}\right).$$

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction $g : x \mapsto f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}\right)$.
2. Montrer que si c n'existe pas, alors g est de signe constant.
3. Montrer que si g est strictement positive, alors $f(0) > f(1)$. Conclure.
4. Application : un coureur parcourt 10 kilomètres en 30 minutes. Montrer qu'il y a un kilomètre qu'il parcourt en 3 minutes exactement.