

Devoir à la maison n° 8

CORRIGÉ

Exercice 1.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$u_{n+1} - u_n = \left(1 + \frac{1}{(n+1) \times (n+1)!}\right) u_n - u_n = \frac{u_n}{(n+1) \times (n+1)!}.$$

Or : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $1 + \frac{1}{k \times k!} \geq 0$, donc, par produit, $u_n \geq 0$. Donc : $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

La suite (u_n) est donc croissante.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \left(1 + \frac{1}{(n+1) \times (n+1)!}\right) u_{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n \times n!}\right) u_n \\ &= \left(2n + \frac{n}{(n+1)(n+1)!} - (n+1)^2\right) \frac{u_n}{n(n+1)(n+1)!}. \end{aligned}$$

Or :

$$2n + \frac{n}{(n+1)(n+1)!} - (n+1)^2 \leq 2n + 1 - (n+1)^2 = -n^2 \leq 0,$$

donc : $v_{n+1} - v_n \geq 0$.

La suite (v_n) est donc décroissante.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a : $v_n - u_n = \frac{u_n}{n \times n!}$.

Comme $u_n \geq 0$, on a donc $v_n - u_n \geq 0$. Par conséquent, $u_n \leq v_n$. Donc, comme (v_n) est décroissante : $u_n \leq v_1$. D'où :

$$0 \leq v_n - u_n \leq \frac{v_1}{n \times n!}.$$

Comme la suite $\left(\frac{v_1}{n \times n!}\right)$ converge vers 0, par encadrement, la suite $(v_n - u_n)$ converge donc vers 0.

4. Comme la suite (u_n) est croissante, la suite (v_n) est décroissante et la suite $(v_n - u_n)$ converge vers 0, les suites (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes. Elles sont donc convergentes vers une limite commune.

Exercice 2. Dans chaque question, sauf indication contraire, on pose un entier quelconque $n \in \mathbb{N}^*$.

1. La fonction f_n est dérivable, et : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{1}{x} - n$. Elle est donc strictement croissante sur $\left]0, \frac{1}{n}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{n}, +\infty\right[$. On a le tableau de variations :

x	0	$\frac{1}{n}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	$-\infty$	$f_n\left(\frac{1}{n}\right)$	$-\infty$

où $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = -\ln(n) - 1 + 2n > 0$ (car la fonction $x \mapsto -\ln(x) - 1 + 2x$ est dérivable, de dérivée $x \mapsto -\frac{1}{x} + 2$, donc est croissante sur $[1, +\infty[$ et vaut 1 en 1, donc est positive sur $\mathbb{N}^*$). Donc, d'après le théorème de la bijection continue, f_n s'annule exactement deux fois.

2. D'après la question précédente, on a $a_n \in \left]0, \frac{1}{n}\right[$ et $b_n \in \left[\frac{1}{n}, +\infty\right[$. De plus, $f_n(2) = \ln(2) > 0$, donc $b_n > 2$.
3. (a) On sait que : $0 < a_n < \frac{1}{n}$, et la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ converge vers 0, donc par encadrement, (a_n) converge vers 0.
- (b) Comme $f_n\left(\frac{1}{n^2}\right) = -2\ln(n) - \frac{1}{n} + 2n > 0$ (car la fonction $x \mapsto -2\ln(x) - \frac{1}{x} + 2x$ est dérivable, de dérivée $x \mapsto \frac{2x^2 - 2x + 1}{x^2}$, donc est croissante sur $[1, +\infty[$, et vaut 1 en 1, donc est positive sur $\mathbb{N}^*$), on a $a_n \leq \frac{1}{n^2}$.
- (c) Comme $f_n(a_n) = 0$, on a $\ln(a_n) = na_n - 2n$, où $na_n \leq \frac{1}{n}$ d'après la question précédente, donc $na_n \rightarrow 0$. Donc $a_n = e^{\ln a_n} = e^{na_n} e^{-2n} \sim e^{-2n}$.
4. (a) Comme $f_{n+1}(b_{n+1}) = 0$, on a $\ln(b_{n+1}) = (n+1)(b_{n+1} - 2)$, donc $f_n(b_{n+1}) = (n+1)(b_{n+1} - 2) - n(b_{n+1} - 2) = b_{n+1} - 2 > 0$. Donc, d'après le tableau de variations de la fonction f_n , $b_{n+1} < b_n$. La suite (b_n) est donc décroissante et minorée par 2, donc converge vers $l \geq 2$.
- (b) On a d'une part : $\frac{\ln b_n}{n} = b_n - 2 \rightarrow l - 2$, et d'autre part : $\frac{\ln b_n}{n} \sim \frac{l}{n} \rightarrow 0$, donc, par unicité de la limite, $l = 2$.
- (c) Comme $\ln b_n \rightarrow \ln 2$, on a $b_n - 2 = \frac{\ln b_n}{n} \sim \frac{\ln 2}{n}$.