

Feuille d'exercices 11

ÉLÉMENTS DE CORRECTION

Exercice 1.

- (a) Les suites $(u_n) = (1, 0, 0, 0, \dots)$ et $(v_n) = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$ conviennent.
 (b) Les suites de terme général $u_n = (-1)^n$ et $v_n = (-1)^{n+1}$ conviennent.

Exercice 3.

- (a) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$
 (b) $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_{n+1} \leq u_n$
 (c) $\exists T \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2T} = u_n$
 (d) $\exists T \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{2(n+T)} = u_{2n}$

Exercice 4.

- (d) La suite (u_n) est récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique associée est : $r^2 = r - 1$, c'est-à-dire $r^2 - r + 1 = 0$, a pour discriminant $\Delta = -3$, donc pour solutions $r_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

Il existe donc $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right)^n + \mu \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \right)^n$. De plus :

$$\begin{cases} u_0 = \lambda + \mu = 2 \\ u_1 = \lambda \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right) + \mu \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \right) = -2 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ (\lambda - \mu)\frac{\sqrt{3}}{2} = 3i \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ \lambda - \mu = 2\sqrt{3}i \end{cases}$$

$$\text{donc } \begin{cases} \lambda = 1 + i\sqrt{3} \\ \mu = 1 - i\sqrt{3} \end{cases}. \text{ Donc : } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{(1+i\sqrt{3})^{n+1} - (1-i\sqrt{3})^{n+1}}{2^n}.$$

- (e) La suite (u_n) est récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique associée est : $r^2 = 6r - 9$, c'est-à-dire $(r - 3)^2 = 0$, de solution double $r_0 = 3$. Il existe donc $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda n + \mu) \times 3^n$. De plus : $\begin{cases} u_0 = \mu = 1 \\ u_1 = 3(\lambda + \mu) = 1 \end{cases}$ donc $\begin{cases} \mu = 1 \\ \lambda = \frac{1}{3} - \mu = -\frac{2}{3} \end{cases}$, donc : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \left(1 - \frac{2n}{3} \right) \times 3^n$.

- (f) La suite (u_n) est récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique associée est : $r^2 = -r - 2$, c'est-à-dire $r^2 + r + 2 = 0$, de discriminant $\Delta = -7$, donc de solution double $r_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$.

Il existe donc $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda \left(\frac{-1+i\sqrt{7}}{2} \right)^n + \mu \left(\frac{-1-i\sqrt{7}}{2} \right)^n$. De plus :

$$\begin{cases} u_0 = \lambda + \mu = 0 \\ u_1 = \lambda \left(\frac{-1+i\sqrt{7}}{2} \right) + \mu \left(\frac{-1-i\sqrt{7}}{2} \right) = 2 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ (\lambda - \mu)\frac{\sqrt{7}}{2} = -2i \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda - \mu = -\frac{4}{\sqrt{7}}i \end{cases}$$

$$\text{donc } \begin{cases} \lambda = -\frac{2}{\sqrt{7}}i \\ \mu = +\frac{2}{\sqrt{7}}i \end{cases}. \text{ Donc : } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = -\frac{2}{\sqrt{7}}i \left(\frac{-1+i\sqrt{7}}{2} \right)^n + \frac{2}{\sqrt{7}}i \left(\frac{-1-i\sqrt{7}}{2} \right)^n.$$

Exercice 5.

- (c) Comme $h(\mathbb{R}_+^*) = [2, +\infty[\subset \mathbb{R}_+^*$, (w_n) est bien définie.
 On a : $\forall x > 0, h(x) > x$, donc la suite (w_n) est croissante. Comme h n'a pas de point fixe, la suite (w_n) diverge donc vers $+\infty$.

Exercice 6. On a : $\forall x > 0, f(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2x}$. La fonction f est donc usuellement continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, elle admet un unique point fixe l (i.e. tel que $f(l) = l$) en $l = \frac{3}{2}$. Les intervalles $\left]0, \frac{3}{2}\right[$ et $\left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$ sont donc échangés par f . La suite (u_n) oscille et converge vers le point fixe $l = \frac{3}{2}$.
Il en va de même si $u_0 \geq \frac{3}{2}$.

Exercice 8.

(d) Soit $A \in \mathbb{R}$. On cherche $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N, -2\sqrt[3]{n} \leq A$. On a :

$$-2\sqrt[3]{n} \leq A \Leftrightarrow \sqrt[3]{n} \geq -\frac{A}{2} \Leftrightarrow n \geq -\frac{A^3}{8}.$$

Donc $N = \max\left(0, -\left\lceil \frac{A^3}{8} \right\rceil\right)$ convient. Donc $(-2\sqrt[3]{n})_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$.

Exercice 9.

(c) Soit $l \in \mathbb{R}$. Prenons $\varepsilon = 1$. Soit $N \in \mathbb{N}$, on cherche $n \geq N$ tel que $|u_n - l| > 1$.
Notons $A = l - 1$. Comme (u_n) tend vers $-\infty$, il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N', u_n < A$. Donc :
 $\forall n \geq N', |u_n - l| > 1$. Donc $n = \max(N, N')$ convient.
Donc (u_n) diverge.

Exercice 11. Soit $\lambda > 0$. Soit $A \in \mathbb{R}$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N, u_n \geq \frac{A}{\lambda}$. Alors : $\forall n \geq N, \lambda u_n \geq A$.
Donc $\lambda u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

De même : soit $\lambda < 0$. Soit $A \in \mathbb{R}$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N, u_n \geq \frac{A}{\lambda}$. Alors : $\forall n \geq N, \lambda u_n \leq A$.
Donc $\lambda u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$.

Si $\lambda = 0$, la suite (λu_n) est trivialement nulle.

Exercice 12. Soit $m, M \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n \leq M$.

Si $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$: soit $A \in \mathbb{R}$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, v_n \geq A - m$. Alors : $\forall n \geq N, u_n + v_n \geq A$.
Donc $u_n + v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Si $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$: soit $\varepsilon > 0$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, |v_n| \leq \frac{\varepsilon}{\max(|m|, |M|)}$. Alors : $\forall n \geq N, |u_n v_n| \leq \varepsilon$.
Donc $u_n v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Exercice 13.

- (a) Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$. Alors, d'après l'inégalité triangulaire renversée : $||u_n| - |\ell|| \leq |u_n - \ell| \leq \varepsilon$. Donc $(|u_n|)$ converge vers $|\ell|$.
(b) Soit $A < 0$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N, u_n \leq A$. Alors : $\forall n \geq N, |u_n| \geq |A|$. Donc $(|u_n|)$ tend vers $+\infty$.

Exercice 14.

- (e) $y_n = \frac{6^n}{3^n} \left(1 + \frac{1}{6^n}\right) \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1\right)$, où $\frac{6^n}{3^n} = 2^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, et $\left(1 + \frac{1}{6^n}\right) \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, donc
 $y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

- (f) $z_n = (2^n - 3^n)(n^2 - 6) = 3^n \times n^2 \times \left(\frac{2^n}{3^n} - 1\right) \left(1 - \frac{6}{n^2}\right)$, où $3^n \times n^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, et $\left(\frac{2^n}{3^n} - 1\right) \left(1 - \frac{6}{n^2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -1$, donc $z_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$.

Exercice 15.

- (a) Par croissances comparées, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.
- (b) Par croissances comparées, $v_n = e^{\frac{\ln(n)}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^0 = 1$.
- (c) Par croissances comparées, $w_n = e^{\frac{\ln(\ln(n))}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^0 = 1$.
- (d) Comme $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on a $\sin \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sin(0) = 0$, donc $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$.
- (e) $y_n = \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(1) = 0$.
- (f) $z_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \times \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$, donc $z_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Exercice 16.

- (d) Faux : la suite de terme général $u_n = n$ est un contre-exemple.
- (e) Faux : la suite de terme général $u_n = \frac{1}{n^2}$ est un contre-exemple.
- (f) Faux : la suite de terme général $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ est un contre-exemple.

Exercice 17.

- (a) On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $-\frac{2}{6n+5} \leq v_n \leq \frac{2}{6n+5}$, donc, par encadrement, $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
- (b) On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{5n^2 - n}{n^2 - 7} \leq x_n \leq \frac{5n^2 + n}{n^2 - 7}$, donc, par encadrement, $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 5$.
- (c) On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{5}{n^2} \leq w_n \leq \frac{9}{n^2}$, donc, par encadrement, $w_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
- (d) On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{5n+2}{3n+1} \leq u_n \leq \frac{5n+2}{3n-1}$, donc, par encadrement, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{3}$.
- (e) On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{n-1}{2+1} \leq y_n \leq \frac{n+1}{2-1}$. Or $\frac{n-1}{2+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ donc, d'après le théorème de divergence par minoration, $y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.
- (f) On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{n^3-1}{n^2+1} \leq z_n \leq \frac{n^3+1}{n^2+1}$. Or $\frac{n^3-1}{n^2+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ donc, d'après le théorème de divergence par minoration, $z_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Exercice 19.

- (a) On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
- $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$,
 - $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)^2} \leq 0$,
 - $v_n - u_n = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$,
- donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

(b) On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

- $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = 0,$
- $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} = 0,$
- $v_n - u_n = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$

donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

(c) On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

- $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$
 $= \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} < 0,$
- $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+2} + 2\sqrt{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}$
 $= \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2})} > 0,$
- $u_n - v_n = 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$

donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 21.

(a) Immédiat (cf exo 11)

(b) C'est le théorème de divergence par minoration.

(c) D'après la formule du binôme de Newton : $(1+a)^n \geq 1 + \binom{n}{1}a = 1 + an.$

(d) Notons $q = 1 + a$ (c'est-à-dire $a = q - 1 > 0$). Alors : $q^n = (1+a)^n \geq 1 + an$ d'après (c) et, d'après (a), (an) tend vers $+\infty$ donc, d'après (b), (q^n) tend vers $+\infty$.

Exercice 22. Comme π admet une infinité de décimales, il existe au moins un chiffre $k \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$ qui apparaît une infinité de fois dans la suite (u_n) (en fait, comme π est irrationnel, il en existe au moins deux). Donc (u_n) admet comme sous-suite la suite constante égale à k , qui est convergente.

Exercice 25. Notons l_1, l_2, l_3 les limites respectives de $(u_{2n}), (u_{2n+1})$ et (u_{3n}) .

Considérons la suite (u_{6n}) : c'est à la fois une sous-suite de (u_{2n}) , donc elle converge vers l_1 ; et une sous-suite de (u_{3n}) , donc elle converge vers l_3 . Donc, par unicité de la limite, $l_1 = l_3$.

De même, considérons la suite (u_{6n+3}) : c'est à la fois une sous-suite de (u_{2n+1}) , donc elle converge vers l_2 ; et une sous-suite de (u_{3n}) , donc elle converge vers l_3 . Donc, par unicité de la limite, $l_2 = l_3$.

Les sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent donc vers la même limite l_3 . Donc, d'après le résultat de l'exercice 24, la suite (u_n) converge également vers l_3 .

Exercice 26.

(d) $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}},$

(e) $y_n = \frac{e^{n^2} + e^{-n^2}}{2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{n^2}}{2},$

(f) Comme $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, z_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}.$

Exercice 27.

(e) $y_n = 2n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{4n}} - 1 \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2n \times \frac{1}{8n} = \frac{1}{4}, \text{ donc } y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{4},$

(f) $z_n = \frac{n^3 \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) + n}{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^2 \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n, \text{ donc } z_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty.$