

Devoir à la maison n° 8

Exercice 1. On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k \times k!}\right) \quad \text{et} \quad v_n = \left(1 + \frac{1}{n \times n!}\right) u_n.$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de u_n .
En déduire que la suite (u_n) est croissante.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $v_{n+1} - v_n$ en fonction de u_n .
En déduire que la suite (v_n) est décroissante.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $v_n - u_n$ en fonction de u_n .
En déduire, par encadrement, que la suite $(v_n - u_n)$ converge vers 0.
4. Que peut-on en conclure sur les suites (u_n) et (v_n) ?

Exercice 2. On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction :

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \ln(x) - n(x - 2) \end{cases}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ a exactement deux solutions.
On les note a_n et b_n , avec $a_n < b_n$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n < \frac{1}{n} < 2 < b_n$.
3. (a) Montrer que la suite (a_n) converge, et préciser sa limite.
(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \leq \frac{1}{n^2}$.
(c) En déduire, en utilisant l'égalité $f_n(a_n) = 0$, que $a_n \sim e^{-2n}$.
4. (a) Montrer que $f_n(b_{n+1}) > 0$. En déduire que la suite (b_n) converge.
On note l sa limite.
(b) Montrer que $\left(\frac{\ln b_n}{n}\right)$ converge, et préciser sa limite. En déduire la valeur de l .
(c) Montrer que $b_n - 2 \sim \frac{\ln 2}{n}$.