

Devoir à la maison n° 7

CORRIGÉ

Exercice 1.

1. On a $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, d'où $B^2 = B$. Par récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $B^n = B$, et $B^0 = I_3$.

2. On a $A = 4B - 3I_3$. Comme B et I_3 commutent, la formule du binôme de Newton s'écrit :

$$A^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (4B)^k (-3I_3)^{n-k}.$$

3. D'après les questions précédentes, on a pour tout n dans $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} A^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} B^k \\ &= (-3)^n I_3 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} B \\ &= (-3)^n I_3 + \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} - (-3)^n \right) B \\ &= (-3)^n I_3 + ((4-3)^n - (-3)^n) B \\ &= (-3)^n I_3 + (1 - (-3)^n) B. \end{aligned}$$

Exercice 2.

1. La suite (u_n) est de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : x \mapsto x^2 - 1$, définie sur $\mathbb{R}$. Comme $u_0 = 2$, on a $u_1 = f(2) = 3 \geq u_0$. Comme de plus f est croissante sur $\mathbb{R}_+$, la suite (u_n) est croissante. Comme f est continue et que $(f(l) = l) \Leftrightarrow \left(l = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} < u_0 \right)$, la suite (u_n) n'est pas majorée, donc tend vers $+\infty$.

Si $u_0 = 1$, alors $u_1 = f(1) = 0$, puis $u_2 = f(0) = -1$, puis $u_3 = f(-1) = 0$, etc. La suite (u_n) est donc 2-périodique à partir du rang 1 : $\forall n \geq 1$, $u_{2n-1} = 0$ et $u_{2n} = -1$.

2. (a) La suite (u_n) est récurrente linéaire d'ordre 2. Comme son équation caractéristique $r^2 = \frac{r+1}{3}$

admet deux racines distinctes $r_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{6}$, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

Comme en particulier $a_0 = \lambda + \mu$ et $a_1 = \lambda r_1 + \mu r_2$, on a $\lambda = \frac{a_1 - a_0 r_2}{r_1 - r_2}$ et $\mu = \frac{a_0 r_1 - a_1}{r_1 - r_2}$.

(b) Comme $|r_1| < 1$ et $|r_2| < 1$, on a $r_1^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $r_2^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, d'où $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

- (c) Par récurrence : $0 \leq a_0 \leq u_0$ et $0 \leq a_1 \leq u_1$ d'après l'énoncé. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons cette propriété vérifiée jusqu'au rang n . Alors $a_{n+1} \geq 0$ d'après l'énoncé, et par hypothèse de récurrence :

$$a_{n+1} \leq \frac{a_n + a_{n-1}}{3} \leq \frac{u_n + u_{n-1}}{3} = u_{n+1}.$$

Donc la propriété est vraie au rang $n + 1$. Donc par récurrence, elle est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$. Comme de plus (u_n) converge vers 0, par encadrement, la suite (a_n) converge vers 0.