Corrigé du TD 18 : Produit de Cauchy de Séries entières

Exercice 1 : (Un problème d'Euler)
Pour n entier naturel, on désigne par u_n le nombre de façons de payer n euros avec uniquement des pièces de 2 euros et 3 euros (dont la mise en circulation est imminente).
1) Déterminer u_n pour $n \leq 6$.
2) Constater que u_n est aussi le nombre de couples $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tels que $2x + 3y = n$.
3) Démontrer que pour $|x| < 1$:
$\dfrac{1}{(1-x^2)(1-x^3)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$.(Produit de Cauchy!!!)
On admet que pour de tels x on a aussi :

$$\frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)} = \frac{1}{4\,(1+x)} + \frac{1}{4\,(1-x)} + \frac{1}{6\,(1-x)^2} + i\frac{\sqrt{3}}{9}\left(\frac{1}{j-x} - \frac{1}{\overline{j}-x}\right)$$

4) En déduire que : $u_n = \dfrac{n+1}{6} + \dfrac{1}{4}(1+(-1)^n) + \dfrac{2\sqrt{3}}{9}\sin\left(\dfrac{2n+2}{3}\pi\right)$, ce pour tout n. [1]

Solution : 1) $u_0 = u_1 = 0$, $u_2 = u_3 = u_4 = u_5 = 1$ et $u_6 = 2$□
2) Pour obtenir n euros avec x pièces de 2 euros et y pièces de 3 euros, il faut évidemment que $2x + 3y = n$ d'où le constat□
3) On note I l'intervalle ouvert $]-1, 1[$ sur lequel on dipose des DSE suivants :
$\dfrac{1}{1-x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, où $a_n = \begin{cases} 0 & \text{si n impair} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$ et
$\dfrac{1}{1-x^3} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, où $b_n = \begin{cases} 1 & \text{si n divisible par 3} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
Notons $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ le produit de Cauchy des séries entières $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, il est au moins défini sur I par théorème. Par ailleurs et pour tout entier naturel n :
$c_n = \displaystyle\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2|p+q=n} a_p b_q = \sum_{(r,s)\in\mathbb{N}^2|2r+3s=n} 1 = u_n$ en vertu de 2)□
4) On a, pour $x \in I$:
a) $\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$,
b) $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$,
c) $\dfrac{1}{(1-x})^2 = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$,
d) $\dfrac{1}{j-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\overline{j})^{n+1} x^n$ et
e) $\dfrac{1}{\overline{j}-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} j^{n+1} x^n$.
Donc avec ce que nous pouvons admettre et l'unicité des coefficients d'une série entière, il vient et pour tout n:
$u_n = \dfrac{(-1)^n + 1}{4} + \dfrac{n+1}{6} + i\dfrac{\sqrt{3}}{9}(-2i\sin(\dfrac{2n+2}{3}\pi)$; ce qui donne le résultat souhaité■

Exercice 2 : (Produit de Cauchy)
On se donne une suite telle (a_n) telle que $a_0 = 1$ et, pour $n \geq 1$:
$a_n \dfrac{1}{n}(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{n-k})$.

[1] Noter en outre que le problème d'origine porte sur des pièces de 2 et 5 écus. Ce qui donne lieu à des calculs plus pénibles. Par exemple $u_{1001} = 167$

a) Etablir que la suite (a_n) est à termes dans $[0, 1]$.
b) Montrer que $\boxed{\mathrm{R}}$ le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est strictement positif.

On note f la somme de la série entière précédente.
c) Prouver qu'il existe une fonction g DSE telle que $f(x) = e^{g(x)}$ au voisinage de 0.
Solution : a) Simple récurrence forte. b) l'encadrement précédent montre que R est supérieur ou égal à 1.
c) Posons $b_0 = 0$ et, pour tout entier naturel non nul n, $b_n = \dfrac{1}{n}$. Compte tenu de la relation de récurrence vérifiée par la suite (a_n), il vient que le produit de Cauchy des séries entières $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$ et $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ (toutes deux de rayon de convergence au moins 1) se trouve être la série entière (de rayon de convergence au moins 1 aussi)$\sum_{n \geq 0} n a_n x^n$.
Donc en passant aux sommes et, pour tout $x \in I =]-1, 1[$, $x f'(x) + \ln(1-x) f(x) = 0$.
Posons, pour $x \in I$, $h(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1-x)}{x} & \text{si} x \neq 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$.
En utilisant le DSE usuel on voit rapidement que h est DSE sur I et par ailleurs pour $x \in I$ et $x \neq 0$: $f'(x) + h(x) f(x) = 0$. Comme $a_0 = f(0) = a_1 = f'(0) = 1$, cette égalité est valide pour $x = 0$.
Autrement dit f est solution de l'EDLO1 : $y' + h(x) y = 0$.
De là on déduit ce que l'on désire$\blacksquare$