Corrigé très partiel du TD 19 : Sommabilité et Analyse

Exercice ($\star\star$) 1 *(D'après Centrale PC 2023)*
Les parties sont indépendantes.
A) Soit $x \in]-1,1[$.
1) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{nx^n}{1-x^n}$ converge et que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{k=0}^{\infty} nx^{n(1+k)})$.
2) Quelle est la série produit de Cauchy de $\sum_{n\geq 0} x^n$ par elle même? Somme de cette série?
3)Montrer que la série $\sum_{p\geq 1} \frac{x^p}{(1-x^p)^2}$ converge et que sa somme est égale à celle de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{nx^n}{1-x^n}$.
B) 1) Montrer que l'on peut définir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^3(k+1)}$.
2) Prouver que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge et déterminer sa somme.
C) On considère la famille $(b_{(i,j)\in\mathbb{N}^2})$ définie, pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, par : $b_{i,j} = \begin{cases} 0 & si\ i > j \\ -1 & si\ i = j \\ \frac{1}{2^{j-i}} & sinon. \end{cases}$
1) Montrer l'existence de $\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} b_{i,j}$ et donner sa valeur.
2) Montrer l'existence de $\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} b_{i,j}$ et donner sa valeur.
3) Les deux sommes doubles précédentes sont-elles égales?
Que dire de la sommabilité de la famille $(b_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$?
D) On considère la famille $(c_{(i,j)\in\mathbb{N}^2})$ définie, pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, par : $c_{i,j} = \begin{cases} 0 & si\ i > j \\ j & si\ i = j \\ -2i3^{i-j} & sinon. \end{cases}$
1) Montrer l'existence de $\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} c_{i,j}$ et donner sa valeur.
2) Soit $j \in \mathbb{N}$. Vérifer que la série $\sum_{i\geq 0} c_{i,j}$ converge et que $\sum_{i=0}^{\infty} c_{i,j} = \frac{1}{2}\frac{3^j-1}{3^{j-1}}$.
3) Quelle est la nature de la série $\sum_{j\geq 0}(\sum_{i=0}^{\infty} c_{i,j})$?
Qu'en conclure?

Solution :
D) 1) Fixons l'entier i alors $c_{i,j} = O(\frac{1}{3^j})$ donc la série $\sum_{j\geq 0} c_{i,j}$ converge; de plus sa somme que l'on note S_i vérifie $S_i = i - 2i\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} = i - 2i\frac{1/3}{1-1/3} = 0$.
Il en résulte que $\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} c_{i,j}$ est nulle$\square$

2)et3) On fixe j alors $c_{i,j} = 0$ dès que $i > j$ donc la série $\sum_{i\geq 0} c_{i,j}$ converge et sa somme, notée T_j est telle que :

$$T_j = -2\sum_{i=0}^{j-1} i3^{i-j} + j = j - 2\times 3^{-j}(\sum_{i=0}^{j-1} i3^i).$$

Posons $S=\sum_{i=0}^{j-1} i3^i$ alors, après changement d'indice, $3S=\sum_{k=1}^{j}(k-1)3^k = S+j3^j-3(\frac{3^j-1}{2})$; ce qui donne $2S=j3^j-3(\frac{3^j-1}{2})$ et finalement $\boxed{T_j=3(\frac{1-3^{-j}}{2})}$.
Cela montre aussi que la série de terme général T_j est grossièrement divergente. Le principe de Fubini étant violé, la famille $(c_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ n'est pas sommable$\blacksquare$

Le 23 février 1913 Srinivasa Ramanujan écrivit une lettre au mathématicien Godfrey Hardy dans laquelle il présenta une théorie selon laquelle la "somme" infinie $1+2+....+n+....$ vaut $\frac{-1}{12}$. Voilà (Centrale PSI 2025) une approche de ce phénomène :

Exercice ($\star$) 1 *On pose* $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$, *où* $x\in\mathbb{R}$.

1) Préciser D *le domaine de définition de* f *et montrer que* f *y est* C^1. *Préciser* f'.

2) Déterminer des réels a, b *et* c *de sorte qu'au voisinage de 0 :* $f'(x)=\frac{a}{x^2}+\frac{b}{x}+c+o(1)$.

3) En déduire la limite de $\sum_{n=0}^{\infty} ne^{-nx}-\frac{1}{x^2}$ *si* x *tend vers 0.*