Corrigé du TD 20 : Probabilité I

Exercice ($\star$) **1** *Un concours de tir entre deux compétiteurs A et B est constitué d'une suite d'épreuves consistant, pour chaque compétiteur, en un tir visantà atteindre une cible. A et B tirent simultanément, l'un et l'autre disposant d'une cible personnelle. On associe à ce concours une expérience aléatoire pour laquelle il ne sera pas nécessaire de définir un espace probabilisé. On émet néanmoins les hypothèses suivantes :*
A chaque tir :
i) la probabilité que A touche sa cible est de $\dfrac{2}{3}$.
ii) la probabilité que B touche sa cible est de $\dfrac{1}{2}$.
iii) les performances de A et B sont indépendantes.
Les tirs successifs sont mutuellement indépendants.
A l'issue de chaque tir, il faut avoir touché sa cible pour poursuivre la compétition; sinon, le candidat est éliminé. Le concours cesse dès que A et B sont éliminés.
Pour n entier naturel non nul, on considère les événements :
A_n : A est le seul à rester en lice à l'issue du $n-$ième tir,
B_n : B est le seul à rester en lice à l'issue du $n-$ièmetir,
C_n : aucun candidat n'est éliminé à l'issue du $n-$ième tir,
D_n : les deux candidats sont éliminés à l'issue du $n-$ième tir.
1) Déterminer les probabilités conditionnelles suivantes :
$\mathbb{P}(A_{n+1} \mid A_n), \mathbb{P}(A_{n+1} \mid B_n), \mathbb{P}(A_{n+1} \mid C_n)$
$\mathbb{P}(B_{n+1} \mid A_n), \mathbb{P}(B_{n+1} \mid B_n), \mathbb{P}(B_{n+1} \mid C_n)$
$\mathbb{P}(C_{n+1} \mid A_n), \mathbb{P}(C_{n+1} \mid B_n), \mathbb{P}(C_{n+1} \mid C_n)$
$\mathbb{P}(D_{n+1} \mid A_n), \mathbb{P}(D_{n+1} \mid B_n), \mathbb{P}(D_{n+1} \mid C_n)$. *Ici on se penche sur la probabilité de chacune des éventualités observables à l'issue d'un nombre donné de tirs.*

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $X_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(A_n) \\ \mathbb{P}(B_n) \\ \mathbb{P}(C_n) \\ \mathbb{P}(D_n) \end{pmatrix}$.

2) A l'aide de la formule des probabilités totales, prouver qu'il existe une matrice $M \in M_4(\mathbb{R})$ à déterminer, telle que : $\forall n \geq 1, X_{n+1} = MX_n$.

On pose $\Delta = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3) Que vaut $P\Delta P$?
4) En déduire que $M^n = P\Delta^n P$, ce pour tout n.
5) Déterminer avec le moins de calculs possible : $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(D_n)$.

Exercice ($\star$) **2** *(ORAL CCINP)*
Soient A,B et C trois événements de même probabilité $p \in]0,1[$ pour lesquels on sait que $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0$. Montrer que $p \leq \dfrac{2}{3}$.

Exercice ($\star$) **3** *(Défaut d'indépendance)*
A,B étant des événements, on se propose de montrer que $|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \leq \dfrac{1}{4}$.
1) Prouver que $x(1-x) \leq \dfrac{1}{4}$ pour tout $x \in [0,1]$.
2) Montrer que $\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A \cap B) - (\mathbb{P}(A \cap B))^2 \leq \dfrac{1}{4}$
3) En appliquant l'inégalité précédente aux événement A et $\overline{B}$, établir l'inégalité en vue.

Exercice ($\star$) 4 *(Inégalité de Bonferroni)*
On considère des événements $A_1, .., A_n$ et A tels que $\bigcap_{k=1}^{n} A_k \subset A$. Prouver que $\mathbb{P}(A) \geq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) - (n-1)$.

Solution : En passant aux événements contraires, il vient $\overline{A} \subset \bigcup_{k=1}^{n} \overline{A_k}$. Puis par croissance d'une probabilité et l'inégalité de Boole : $1-\mathbb{P}(A) \leq \sum_{k=1}^{n}(1-\mathbb{P}(A_k))$. Ce qui, après nettoyage, donne l'inégalité désirée■

Exercice ($\star$) 5 *On se place dans l'espace probabilisé* $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathbb{P})$.
1) Prouver que la suite $(\mathbb{P}(\{n\}))$ converge vers 0.
2) On suppose que la suite précédente est décroissante. Montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\{2n\}) \geq \frac{1}{2}$.

Exercice ($\star$) 6 *1) Déterminer 3 réels $a, b, c : \forall k \in \mathbb{N}^*, \dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1} + \dfrac{c}{k+2}$.*
2) Montrer que $\mathbb{P}(\{k\}) = \dfrac{d}{k(k+1)(k+2)}, k \in \mathbb{N}^*$ définit une probabilité sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ pour un choix pertinent de d.
3) Déterminer alors $\mathbb{P}(n \geq 2026)$.

Exercice ($\star\star$) 1 *(Démographie d'après le cours de l'X de Sylvie Méléard)*
Soient $a \in]0, 1/2[$ et p_k, $k \in \mathbb{N}$, la probabilité pour qu'un couple ait k enfants.
Nous supposons que $p_0 = p_1 = a$ et $p_k = (1-2a)2^{-(k-1)}$ pour $k \geq 2$; enfin on suppose que les probabilités d'avoir une fille ou un garcon sont égales à $\frac{1}{2}$.
Pour tout entier naturel n on pose E_n : "le couple a n enfants", F_n : "le couple a n filles", G_n : "le couple a n garçons".
1) Etablir que $\mathbb{P}(E_2 \mid F_2) = \dfrac{\mathbb{P}(F_2 \mid E_2)\, p_2}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(F_2 \mid E_n)\, p_n}$.
2) Vérifier que $\mathbb{P}(F_2 \mid E_n) = \dbinom{n}{2} 2^{-n}$.
3) Déterminer la probabilité qu'un couple ayant deux filles ait deux enfants seulement.
4) Quelle est la probabilité qu'un couple ait deux garçons sachant qu'il a deux filles?

Solution : 3) Méthode donnée en cours. Résultat correct $\dfrac{27}{64}$□
4) On part de $\mathbb{P}(F_2|E_4) = \dfrac{\mathbb{P}(E_4 \cap F_2)}{p_4}$ et en remarquant $E_4 \cap F_2 = G_2 \cap F_2$, il vient $\mathbb{P}(G_2|F_2) = \dfrac{\mathbb{P}(F_2|E_4)p_4}{\mathbb{P}(F_2)} = \dfrac{81}{512}$■

Exercice ($\star\star$) 2 *(Les probabilités au secours de Persée)*
Persée est à la recherche de son épouse Andromède qu'un dieu malveillant a enfermée dans une caverne. Malheureusement, il y a trois cavernes identiques : dans l'une se trouve Andromède mais dans chacune des deux autres se trouve une gorgone au regard pétrifiant. Zeus intervient : "Mon fils, je sais dans quelle caverne Andromède se trouve mais je ne peux pas te le dire. Toutefois je peux t'aider. Une fois que tu auras choisi une caverne, je peux t'indiquer parmi les deux cavernes restantes, une caverne où il y a une gorgone et je te conseille alors de modifier ton choix initial." Persée : "Ô père cruel, que je change ou non mon choix, il y a toujours une chance sur deux que je sois transformé en pierre !" Zeus : "Persée, la mathématique est meilleure conseillère que la colère!"
Quelle est la probabilité que Persée trouve Andromède si Persée ne modifie pas son choix?
Quelle est la probabilité que Persée trouve Andromède si Persée modifie son choix?
Que lui conseillez-vous?

Solution : En cas de non modification de son choix, la probabilité pour Persée de trouver la caverne abritant Andromède est de $\boxed{\dfrac{1}{3}}$□

Supposons que Persée accepte de suivre le conseil de Zeus et qu'il ne tombe pas sur la bonne caverne (on raisonne donc sur l'événement contraire). Cette possibilité signifie exactement que son choix initial était le bon. Donc la probabilité que Persée ne retrouve pas sa promise en se fiant aux directives paternelles est de $\boxed{\dfrac{1}{3}}$. En conséquence la probabilité dans ce contexte de la libérer est de $\boxed{\dfrac{2}{3}}$ $\blacksquare$

Exercice ($\star$) 7 *(Probabilités composées)*
Soit une urne contenant 4 boules blanches et 3 boules noires. On tire une à une sans remise 3 boules de cette urne. Quelle est la probabilité que les deux premières tirées soient blanches et la troisième noire ? (On notera B_i l'événement " on tire une boule blanche au i-ième tirage et on procédera de même pour les noires).

Solution : Avec des notations évidentes on cherche p la probabilité de l'événement $B_1 \cap B_2 \cap N_3$. La formule des probabilités composées nous donne $p = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(B_2|B_1)\mathbb{P}(N_3|B_1 \cap B_2) = \dfrac{4}{7} \times \dfrac{3}{6} \times \dfrac{3}{5} = \dfrac{6}{35}$ $\blacksquare$

Exercice ($\star$) 8 *(Probabilités totales)*
Considérons le jeu suivant : on dispose d'une urne contenant au début une boule blanche et on joue indéfiniment à pile ou face avec une pièce parfaite. Chaque fois que l'on obtient face, on ajoute une boule noire dans l'urne et la première fois que pile est obtenu, on tire (au hasard !!!) une boule dans cette urne. Quelle est la probabilité d'obtenir (dans ce contexte) une boule blanche? On posera B l'événement " obtenir une boule blanche" et, pour $n \geq 1$ A_n l'événement " pile apparaît pour la première fois au n-ième coup".

Solution : Les A_n constituent un système complet d'événements pour lequel la formule des probabilités totales donne : $\mathbb{P}(B) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B|A_n)\mathbb{P}(A_n)$.
Fixons un entier naturel non nul n. Sachant que pour les $n-1$ premiers lancers face est obtenu, l'urne contient une boule blanche et $n-1$ boules noires donc $\mathbb{P}(B|A_n) = \dfrac{1}{n}$. De plus clairement $\mathbb{P}(A_n) = \dfrac{1}{2^n}$ soit avec les DSE usuels (oui, cela sert): $\boxed{\mathbb{P}(B) = \ln(2)}$ $\blacksquare$

Exercice ($\star$) 9 *(Exemple de Bernstein)*
On jette deux fois de suite une pièce équilibrée. Soient les événement A: " obtenir face au premier lancer ", B : " obtenir face au second lancer " et C : " obtenir le même résultat aux deux jets". Ces événements sont-ils deux à deux indépendants? Mutuellement indépendants?

Solution : Pour la première question : Oui. Par exemple $\mathbb{P}(A \cap B) = \dfrac{1}{4} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ idem pour les autres indépendances.
Non à la seconde question puisque $A \cap B \cap C = A \cap B$ donc $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \dfrac{1}{4} \neq \dfrac{1}{8} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$ $\blacksquare$

Exercice ($\star\star\star$) 1 *(Probabilité de Zipf, fonction zéta, Centrale écrit)*

Soient $s>1$ *et* $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$.

1) En utilisant le cours, montrer que l'on peut définir une probabilité $\mathbb{P}$ *sur* $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ *en posant :* $\mathbb{P}(\{n\})=\dfrac{n^{-s}}{\zeta(s)}$,*ce pour tout entier naturel non nul* n.

On se place désormais dans l'espace probabilisé $(\mathbb{N}^*, P(\mathbb{N}^*), \mathbb{P})$.

2) Déterminer $\mathbb{P}(A_m)$ *si* $m\in\mathbb{N}^*$ *et où on a posé* $A_m = m\mathbb{N}^*$.

3) Les événements A_2 *et* A_3 *sont ils indépendants? Même question pour* A_4 *et* A_6*?*

On admet que si des entiers naturels sont premiers entr'eux alors tout multiple de tous ces entiers est divisible par leur produit.

On considère alors la suite $p_1 < p_2 < ....$ *des nombres premiers et pour* $n \geq 1$ *, on pose* C_n *comme l'ensemble des entiers naturels qui ne sont divisibles par aucun des* $p_i, 1\leq i\leq n$.

4) Prouver l'indépendance mutuelle de la suite d'événements $(\overline{A_{p_1}}, ..., \overline{A_{p_n}})$.

5) En déduire $\mathbb{P}(C_n)$.

6) Déterminer $\bigcap_{n\geq 1} C_n$.

7) En déduire que la suite $\left(\prod_{i=1}^{n} \dfrac{1}{1-p_i^{-s}}\right)_n$ *converge vers* $\zeta(s)$ *(Superbe résultat d'Euler).*

Exercice ($\star$) 10 *(CCINP 2025 : exercice 3)*

On fixe une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ *d'entiers naturels non nuls. On suppose d'un stock illimité de boules blanches et on considère une urne contenant initialement une boule blanche et une boule rouge indiscernables au toucher. On procède à des tirages successifs dans cette urne en respectant à chaque fois le protocole suivant pour tout entier naturel non nul* k *et ce au* k*-ième tirage :*

i) si la boule tirée est blanche, on la replace dans l'urne et on ajoute u_k *boules blanches supplémentaires;*

ii) si la boule tirée est rouge, on la replace dans l'urne.

Pour tout entier naturel non nul n*, on désigne par* B_n *l'événement « la boule tirée lors du* n*-ième tirage est blanche » et on note :*

$E=\bigcap_{n\geq 1} B_n$.

L'objectif principal de cet exercice est de déterminer une condition nécessaire et suffisante sut $(u_n)_{n\geq 1}$ *pour que la probabilité de l'événement* E *soit nulle.*

On considère la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ *définie par :* $S_0 = 1$ *et, pour tout* $n\geq 1$, $S_n = 1+\sum_{k=1}^{n} u_k$.

On pose, enfin, pour $n\geq 1$, $p_n = \mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^{n} B_k)$.

1) Montrer que la suite (p_n) *est décroissante. En déduire qu'elle est convergente, puis justifier que sa limite est égale à* $\mathbb{P}(E)$.

2) Soit $k\in\mathbb{N}^*$. *On suppose l'événement* $\bigcap_{i=1}^{k} B_i$ *est réalisé; décrire la composition de l'urne avant d'effectuer le* $(k+1)$*-ième tirage en fonction de* S_k. *En déduire la probabilité conditionnelle* $\mathbb{P}(B_{k+1}|\bigcap_{i=1}^{k} B_i)$.

3) Vérifier que, pour tout entier naturel non nul n, $p_n = \prod_{k=0}^{n-1} \dfrac{S_k}{1+S_k}$.

4) Quel est le comportement à l'infini de la suite (S_n)*? 5) Etablir que les séries* $\sum_{k\geq 0} \ln(\dfrac{S_k}{1+S_k})$ *et* $\sum_{k\geq 0} \dfrac{1}{S_k}$ *sont de même nature.*

6) Montrer que E *est négilgeable si et seulement si la série* $\sum_{k\geq 0} \dfrac{1}{S_k}$ *diverge.*

7) On suppose que $u_n = 1$ *pour tout* $n\in\mathbb{N}^*$. *Déterminer* $\mathbb{P}(E)$.

8) Déterminer une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ *de sorte que* E *soit non négligeable en justifiant votre réponse.*

Exercice ($\star\star\star$) 2 *(Mines 2025 partiel)*
On définit trois parties de $A = (\mathbb{N}^*)^2$ *:*
i) $E_1 = \{(p,q) \in A \ / \ p = q\}$.
ii) $E_2 = \{(p,q) \in A \ / \ p|q\}$.
iii) $E_3 = \{(p,q) \in A \ / \ p > q\}$.
On fixe alors $n \in \mathbb{N}^*$ *et on décide de tirer successivement et avec remise deux entiers* p *et* q *selon une loi uniforme sur l'intervalle* $[\![1, n]\!]$.
On définit alors les événements suivants :
•E_n *: « On obtient* $(p,q) \in E_1 \cup E_2 \cup E_3$ *».*
•A_n *: « On obtient* $p = q$ *».*
•B_n *: « On obtient* $p < q$ *et* q *divisible par* p *».*
•C_n *: « On obtient* $p > q$ *».*
1) Justifier que $\{A_n, B_n, C_n\}$ *forme une partition de* E_n.
2) Calculer $\mathbb{P}(A_n)$ *puis* $\mathbb{P}(C_n)$.
3) Montrer que $\mathbb{P}(B_n) = \dfrac{1}{n^2}(\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \left\lfloor \dfrac{n}{p} \right\rfloor) - \dfrac{1}{n}$, *en déduire* $\mathbb{P}(A_n \cup B_n)$.
4) Prouver que $\mathbb{P}(A_n \cup B_n) \sim \dfrac{\ln(n)}{n}$ *si* $n \to \infty$.
5) En déduire la limite de la suite $(\mathbb{P}(E_n))$.

Exercice ($\star\star$) 3 *(Mines écrit partiel)*
Un labyrinthe est constitué de cinq salles, numérotées de 1 *à* 5*, qui communiquent par des tubes selon le schéma donné ci-dessous.*
Un rat se déplace dans ce labyrinthe, et on reève sa position en des instants numérotés $0, 1, 2, \ldots, k, \ldots$ $(k \in \mathbb{N})$.
On admet que, si le rat se trouve à l'instant k $(k \in \mathbb{N})$ *dans la salle numéro* i $(1 \leqslant i \leqslant 5)$*, alors il empruntera aléatoirement l'un des tubes de la salle* i *et se trouvera donc, à l'instant* $k+1$*, avec équiprobabilité, dans l'une quelconque des salles communiquant avec la salle* i.
On considère, pour tout k *entier naturel et tout* $1 \leq i \leq 5$*, les événements* S_k^i *: " le rat à l'instant* k *se trouve en salle* i*".*
Pour tout $k \in \mathbb{N}$*, on introduit la matrice-colonne :*
$$X_k = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(S_k^1) \\ \\ \mathbb{P}(S_k^5) \end{pmatrix}.$$

1. *Explicititer la matrice carrée* $B \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ *telle que* $X_{k+1} = BX_k$ *pour tout* k *entier naturel.*
2. *En observant les colonnes de la matrice* B*, montrer que le réel* 1 *est valeur propre de* ${}^tB$ *et expliciter un vecteur propre associé.*

   On suppose que $X_0 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/16 \\ 3/16 \\ 3/16 \\ 3/16 \end{pmatrix}$.

3. *Montrer qu'alors* $X_k = X_0$*, pour tout* k.