

Devoir à la maison n° 7

Exercice 1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. On pose $B = \frac{1}{4}(A + 3I_3)$.

1. Calculer B^2 . En déduire B^n pour tout n dans $\mathbb{N}$.
2. Soit n dans $\mathbb{N}$. Déterminer A^n en fonction de B , I_3 et n .
3. En déduire A^n pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Exercice 2.

1. Étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 + 1$.
Que se passe-t-il si $u_0 = 1$?
2. On considère une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à termes positifs telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} \leq \frac{a_{n+1} + a_n}{3}.$$

On veut montrer que cette suite converge vers 0.

- (a) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = a_0$, $u_1 = a_1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + u_n}{3}$.

Déterminer une écriture explicite du terme général u_n en fonction de a_0 et a_1 .

- (b) Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.
- (c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq a_n \leq u_n$. Conclure.