Corrigé du TD 18 : Séries entières

Exercice ($\star$) 1 *(Rayon de convergence)*
Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, *où :*

i) $a_n = (-1)^n \ln(n)(\pi)^n \dfrac{n+4}{2n+7}$. *ii)* (a_n) *est une suite convergeant vers 2026. iii)* $a_n = \dfrac{2^{n^2}}{(2n)!}$.

Solution : Les trois séries entières étant non lacunaires, on peut envisager l'emploi de la règle de d'Alembert; en notant R le rayon de convergence, il vient : i) $\boxed{R = \dfrac{1}{\pi}}$. ii) $\boxed{R = 1}$. iii) $\boxed{R = 0}$ ■

Exercice ($\star$) 2 *(Technique d'Abel)*
Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R > 0$.
Prouver que celui de $\sum_{n\geq 0} \dfrac{a_n}{n!} z^n$ *est infini.*

Solution : Par hypothèse si $0 < r_0 < R$, la suite $(a_n (r_0)^n)$ est bornée. Fixons un tel r_0.
Pour tout n et tout $r > 0$: $\dfrac{a_n}{n!} r^n = (a_n (r_0)^n)(\dfrac{(r/r_0)^n}{n!})$. Ce qui montre que la suite $(\dfrac{a_n}{n!} r^n)$ est bornée en tant que produit de deux suites bornées et donne un rayon de convergence infini pour $\sum_{n\geq 0} \dfrac{a_n}{n!} z^n$ ■

Exercice ($\star$) 3 *(Penser aux complexes)*
a) Rayon de convergence et somme de $\sum \cos(\dfrac{2n\pi}{3}) x^n$.
b) Même question avec $\sum \dfrac{\cos(\frac{2n\pi}{3})}{n+1} x^{n+1}$.

Solution : a) Corrigé en classe. b) Corrigé partiellement (calcul final non achevé mais drivé). Pour la somme et pour $x \in]-1, 1[$, on trouve : $\boxed{\dfrac{1}{4}\ln(x^2 + x + 1) + \arctan(\dfrac{\sqrt{3}x}{x+2})}$ ■

Exercice ($\star$) 4 *(Reconnaître une somme)*
On pose, pour x à préciser, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{\cos^2(nx) x^{2n}}{n!}$.
Ecrire f à l'aide de fonctions usuelles.

Solution : On notera d'abord que f n'est pas la somme d'une série entière puis que, pour tout réel x et tout n : $|\dfrac{\cos^2(nx)x^{2n}}{n!}| \leq \dfrac{x^{2n}}{n!}$. Donc par comparaison avec une série esponentielle, nous obtenons que f est bien définie sur $\mathbb{R}\square$
Enfin, par simple trigo : $\cos^2(t) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}(e^{2it} + e^{-2it})$, ce pour tout réel t. Ainsi (les trois sommes existent par le même argument que précédemment) et pour tout réel x (en utilisant le DSE de l'exponentielle) :

$$f(x) = \frac{1}{2}(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}) + \frac{1}{4}(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(xe^{ix})^{2n}}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(xe^{-ix})^{2n}}{n!}) = \boxed{\frac{e^{x^2} + \cos(x^2\sin(2x))e^{x^2\cos(2x)}}{2}}$$ ■

Exercice ($\star$) 5 *(DSE)*
Déterminer le DSE de $x \to \ln(x^2 - 5x + 6)$.

Solution : On note f la fonction à développer en série entière en observant déjà qu'elle est de classe C^∞ au voisinage de 0 et même sur son domaine de défintion à savoir $\mathbb{R} \setminus [2,3] = D$.
Pour $x \in D$, $f(x) = \ln((2-x)(3-x)$ et pour $x \in]-2,2[$ $f(x) = \ln(2-x)+\ln(3-x) = \ln(6)+\ln(1-\dfrac{x}{2})+\ln(1-\dfrac{x}{3})$ puis, grâce au DSE de $u \to \ln(1-u)$ sur]-1,1[, il vient $\boxed{f(x) = \ln(6) - \sum_{n=1}^{\infty}(2^{-n}+3^{-n})\dfrac{x^n}{n}}$.
On pouvait aussi dériver f, décomposer en simple f' en donner un DSE (cf exemple cours) et, enfin primitiver terme à terme le DSE de f'....(plus long)■

Exercice ($\star\star\star$) 1 *(Vieil X)*
Domaine de définition et somme de $\sum_{n\geq 1} H_n x^n$.

Solution : Pour tout $n \geq 1$, $1 \leq H_n \leq n$ donc, par encadrement, le rayon de cette série entière vaut $\boxed{1}$□
Pour la somme de cette même série entière que nous noterons S, on remarque que $\sum_{n\geq 1} H_n x^n$ est le produit de Cauchy des séries entières $\sum_{n\geq 0} x^n$ et $\sum_{n\geq 1}\dfrac{x^n}{n}$ (toutes deux de rayon de convergence 1) donc (en vertu des DSE usuels) : $\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ S(x) = -\dfrac{\ln(1-x)}{1-x}}$■

Exercice ($\star$) 6 *(Fonction C^∞ non DSE)*
On doit à Cauchy (1823) le premier exemple de fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$ n'étant pas DSE.
On pose $f : x \to \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
a) Vérifier que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ et continue sur $\mathbb{R}$.
b) Etablir par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \neq 0$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}}f(x)$.
c) En déduire que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que toutes les dérivées successives de f en 0 sont nulles.
d) Etablir que la série de Taylor de f converge sur $\mathbb{R}$ mais que f n'est pas DSE (procéder par l'absurde).

Solution :a) et b) ne posent aucune difficulté. c) On utilise le théorème du prolongment des dérivées à tout ordre (cf cours première année). Fixons $n \geq 1$ et soit $x \neq 0$ donc $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}}f(x) = O(\dfrac{f(x)}{x^{3n}})$ si $x \to 0$. Or $|\dfrac{f(x)}{x^3 n}| = \dfrac{t^{3n/2}}{e^t}$, en posant $t = \dfrac{1}{x^2}$; donc en faisant tendre x vers 0 (i.e $t \to +\infty$), nous obtenons, par croissance comparée, que $f^{(n)}(x) \underset{x\to 0}{\to} 0$. Ainsi le théorème pré-mentionné nous assure que (avec les hypothèses vérifiées en a)) f est bien de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que toutes les dérivées successives de f en 0 sont nulles (limites obtenues auparavant).
d) La série de Taylor de f est donc la série nulle qui converge bien sur $\mathbb{R}$ et si f était DSE, elle serait somme de cette série de Taylor au voisinage de 0. Autrement dit f serait nulle sur un tel voisinage. Ce qui est absurde puisque $f > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$. $\boxed{\text{f n'est pas DSE}}$■

Exercice ($\star\star$) 1 *(Fonction DSE)*
a) Domaine de définition de $f : x \to \displaystyle\int_0^1 e^{-xt\ln(t)}dt$ *?*
b) Prouver que f est DSE.

Solution : a) Posons, pour $t \in]0,1]$, $g(t) = t\ln(t)$ et $g(0) = 0$; cette fonction est continue sur le segment $[0,1]$, il en résulte (intégrande continue sur $]0,1]$ et fausse singularité en 0) que f est définie sur $\mathbb{R}$.
b) Fixons un réel x et posons $h(t) = e^{-xt\ln(t)}$ pour $t \in]0,1]$, nous disposons alors dans ce contexte (DSE exponentielle) de l'égalité $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)$, où on a posé (pour tout entier naturel n et tout $t \in [0,1]$) $u_n(t) = (-1)^n\dfrac{(xg(t))^n}{n!}$.
Nous allons employer le théorème d'intégration terme à terme sur un segment. En effet, pour tout n les u_n (cf a)) sont continues sur le segment $[0,1]$. De plus en notant M un majorant de $|g|$ (Weierstrass), il vient

$|u_n(t)| \leq \dfrac{(M|x|)^n}{n!}$, ce pour tout $(n,t) \in \mathbb{N} \times [0,1]$. Ce qui prouve (série majorante étant exponentielle) la convergence normale sur $[0,1]$ de la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$.

L'intégration terme à terme étant légitimée, nous avons $\int_0^1 h(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty}(\int_0^1 u_n(t)dt)$. Soit en explicitant et après calcul par IPP répétées :

$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{(n+1)^{n+1}}}$ et ce pour tout réel x donc ce DSE est validé sur $\mathbb{R}$■

Exercice (⋆⋆) 2 *(Un problème d'Euler)*
Pour n entier naturel, on désigne par u_n le nombre de façons de payer n euros avec uniquement des pièces de 2 euros et 3 euros (dont la mise en circulation est imminente).
1) Déterminer u_n pour $n \leq 6$.
2) Constater que u_n est aussi le nombre de couples $(x,y) \in \mathbb{N}^2$ tels que $2x+3y=n$.
3) Démontrer que pour $|x|<1$:
$\dfrac{1}{(1-x^2)(1-x^3)} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$.*(Produit de Cauchy!!!)*
On admet que pour de tels x on a aussi :

$$\frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)} = \frac{1}{4\,(1+x)} + \frac{1}{4\,(1-x)} + \frac{1}{6\,(1-x)^2} + i\frac{\sqrt{3}}{9}\left(\frac{1}{j-x} - \frac{1}{\bar{j}-x}\right)$$

4) En déduire que : $u_n = \dfrac{n+1}{6} + \dfrac{1}{4}(1+(-1)^n) + \dfrac{2\sqrt{3}}{9}\sin\left(\dfrac{2n+2}{3}\pi\right)$*, ce pour tout n.* [a]

[a] Noter en outre que le problème d'origine porte sur des pièces de 2 et 5 écus. Ce qui donne lieu à des calculs plus pénibles. Par exemple $u_{1001} = 167$

Exercice (⋆⋆⋆) 2 *(Produit de Cauchy)*
On se donne une suite telle (a_n) telle que $a_0 = 1$ et, pour $n \geq 1$:
$a_n \dfrac{1}{n}(\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{a_k}{n-k})$.
a) Etablir que la suite (a_n) est à termes dans $[0,1]$.
b) Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est strictement positif.
On note f la somme de la série entière précédente.
c) Prouver qu'il existe une fonction g DSE telle que $f(x) = e^{g(x)}$ au voisinage de 0.

Exercice (⋆⋆) 3 *(Equation différentielle)*
Soit (E) : $x^2y'' + xy' + (4x^4-1)y = 0$.
Déterminer les solutions de (E) DSE.

Solution : En appliquant la méthode indiquée en cours. On trouve que ce sont les $x \in \mathbb{R} \to \lambda\dfrac{\sin^2(x)}{x}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$, ces fonctions valant toute 0 en 0■

Exercice (⋆⋆⋆) 3 *(X)*
On se donne (a_n) une suite à termes dans $\{-1,1\}$ et on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{n!}x^n$, ce pour x à préciser.
On suppose que sur $\mathbb{R}_+$ toutes les dérivés successives de f sont bornées par 1.
Déterminer f.

Solution : La série exponentielle nous assure que f est définie et DSE sur $\mathbb{R}$.
Nous nous proposons de montrer que $f = \pm g$, où $g : x \in \mathbb{R} \to e^{-x}$.
C'est évidemment le cas si la suite (a_n) est égale à $\pm((-1)^n)$. Supposons que ce ne soit pas le cas; ceci signifie qu'il existe un entier naturel p tel que (sans perte de généralité en passant à l'opposé) $a_p = a_{p+1} = 1$. En

posant $g = f^{(p)}$, nous avons donc $g(0) = 1$ et $g'(0) = 1$ (cf expression des coefficients d'une S.E en fonction des dérivés successives en 0 de sa somme). Ceci montre que g est strictement croissante au voisinage de 0^+; on contredit le fait que $g \leq 1$ sur un tel voisinage■

Exercice (⋆) 7 *(Calcul de somme)*
Existence et valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n(n+1))^2}{n!}$.

Solution : Méthode donnée en cours. Résultat $\boxed{27e}$■

PROBLÈME : Autour du théorème d'ABEL sur les séries entières

Dans tout le problème :
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels telle que la série entière $\sum a_n x^n$ de la variable réelle x ait pour rayon de convergence 1.
On désigne alors par $\sum a_n$ la série de terme général a_n et par f la fonction définie sur l'intervalle $]-1,1[$ par : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
On désigne par $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ les deux propriétés suivantes possibles de la suite (a_n) :
$(\mathcal{P}_1)$: la série $\sum a_n$ converge.
$(\mathcal{P}_2)$: la fonction f admet une limite finie, notée $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x)$, lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

I. GÉNÉRALITÉS

1. En utilisant des développements en série entière "usuels", donner dans chaque cas, un exemple de suite (a_n) telle que :

- **a.** (a_n) vérifie $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$;
- **b.** (a_n) ne vérifie pas $(\mathcal{P}_1)$ et vérifie $(\mathcal{P}_2)$;
- **c.** (a_n) ne vérifie ni $(\mathcal{P}_1)$ ni $(\mathcal{P}_2)$;
- **d.** La série $\sum a_n x^n$ ne converge pas uniformément sur l'intervalle $]-1,1[$ (justifier).

2. On suppose que la série $\sum a_n$ est absolument convergente ; montrer alors que la fonction f admet une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures et que $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

3. *Exemple*
Déduire de la question précédente la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$
(on pourra utiliser une décomposition en éléments simples).

II THÉORÈME D'ABEL

4. On suppose dans cette question que la série $\sum a_n$ converge. On va montrer qu'alors la fonction f admet une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures (théorème d'Abel).
On pose $r_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ et pour tout $x \in [0,1]$, $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k$.

- **a.** Simplifier, pour tout $x \in [0,1]$, $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} (r_{n+p-1} - r_{n+p}) x^{n+p}$.
- **b.** En déduire que, pour tout $x \in [0,1[$, $R_n(x) = r_n x^{n+1} + x^{n+1}(x-1) \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} r_{n+p} x^{p-1}$.

c. Soit un réel $\varepsilon > 0$, justifier qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$ et tout entier naturel p on ait $|r_{n+p}| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$, puis que, pour tout entier $n \geqslant n_0$ et pour tout réel $x \in [0,1]$, $|R_n(x)| \leqslant \varepsilon$.

d. Conclure que la fonction f admet une limite lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures et que $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$.

5. Que peut-on dire de la série $\sum a_n$ si $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$?

6. *Exemple*
Retrouver le développement en série entière en 0 de la fonction $x \longmapsto \arctan(x)$, puis utiliser le théorème d'Abel pour écrire $\dfrac{\pi}{4}$ comme somme d'une série numérique.

7. *Application*
On rappelle que le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes est une série absolument convergente.

a. Le produit de Cauchy de deux séries convergentes est-il une série convergente ?
(On pourra examiner le cas $u_n = v_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{1/4}}$ pour $n \geqslant 1$).

b. Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries de nombres réels ; on pose, pour n entier naturel, $w_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$ et on suppose que les trois séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$ convergent.
Montrer, à l'aide du théorème d'Abel, qu'alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$.

III RÉCIPROQUE DU THÉORÈME D'ABEL

8. Justifier que la réciproque du théorème d'Abel est fausse.

On cherche à rajouter une condition $(\mathcal{Q})$ à la condition $(\mathcal{P}_2)$ de telle sorte que si (a_n) vérifie $(\mathcal{P}_2)$ et $(\mathcal{Q})$, alors elle vérifie $(\mathcal{P}_1)$.

9. On prend pour $(\mathcal{Q})$ la propriété : pour tout entier n, $a_n \geqslant 0$.
Montrer que si (a_n) vérifie les propriétés $(\mathcal{P}_2)$ et $(\mathcal{Q})$, alors elle vérifie la propriété $(\mathcal{P}_1)$
(on pourra montrer que $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k \leqslant \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$).

Si on prend pour $(\mathcal{Q})$ la propriété : la suite (a_n) vérifie $a_n = O\left(\dfrac{1}{n}\right)$ (la suite (a_n) est dominée par la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ au voisinage de $+\infty$), on obtient **le théorème de Littlewood** dont on admettra la démonstration pour l'appliquer dans la partie suivante.

IV SÉRIES HARMONIQUES TRANSFORMÉES

Désormais, on admet et on pourra utiliser le théorème de Littlewood :
si la fonction f admet une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures et que $a_n = O\left(\dfrac{1}{n}\right)$, alors la série $\sum a_n$ converge.

Pour p entier naturel non nul, on considère une suite $(\varepsilon_n)_{n \geqslant 1}$ périodique de période p formée d'éléments de l'ensemble $\{-1, 1\}$.

10. Donner, en justifiant leur valeur, les rayons de convergence des séries entières :

$$\sum_{n \geqslant 1} \varepsilon_n x^{n-1} \text{ et } \sum_{n \geqslant 1} \frac{\varepsilon_n}{n} x^n.$$

On pose, pour $x \in]-1, 1[$: $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\varepsilon_n}{n} x^n$ et $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n x^{n-1}$.

11. Établir que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\varepsilon_n}{n}$ converge si et seulement si la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^x g(t)t$ admet une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

12. Montrer que g est une fraction rationnelle à déterminer.

13. Retrouver, uniquement par les deux questions précédentes, que la série harmonique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ diverge et que la série alternée $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n}$ converge en précisant sa somme.

14. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{p}\varepsilon_i$ pour que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\varepsilon_n}{n}$ converge. Que peut-on en conclure dans les cas où la période p est un entier impair ?

15. *Exemple*
Dans le cas où la suite $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ est périodique de période 6 avec :
$\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 1, \varepsilon_3 = 1, \varepsilon_4 = -1, \varepsilon_5 = -1, \varepsilon_6 = -1$, déterminer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\varepsilon_n}{n}$.
(il est demandé de détailler les calculs).

Solution : II THÉORÈME D'ABEL

4.a. Comme $r_{n+p-1} - r_{n+p} = a_{n+p}$, on a tout simplement: $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}(r_{n+p-1} - r_{n+p})\, x^{n+p} = R_n(x)$.

4.b. Il est bien connu *(mais ça n'est pas au programme)* que dans ces histoires, il faut travailler sur les sommes partielles: $\displaystyle\sum_{p=1}^{k}(r_{n+p-1} - r_{n+p})\, x^{n+p} = \sum_{p=1}^{k} r_{n+p-1}\, x^{n+p} - \sum_{p=1}^{k} r_{n+p}\, x^{n+p}$; après mise à l'écart du premier terme de la première somme et réindexation des autres, on obtient: $\displaystyle\sum_{p=1}^{k}(r_{n+p-1} - r_{n+p})\, x^{n+p} = r_n\, x^{n+1} + x^{n+1}(x-1)\sum_{p=1}^{k-1} r_{n+p}\, x^{p-1} - r_{n+k}\, x^{n+k}$; le dernier terme tend vers 0 lorsque k tend vers l'infini car r_{n+k} tend vers 0 puisque la série $\sum a_n$ converge, et x^{n+k} est borné; il suffit donc de faire tendre k vers l'infini pour obtenir la relation voulue[1].

4.c. Comme on l'a déjà signalé, r_n tend vers 0; par conséquent, si l'on se donne > 0, on dispose d'un entier n_0 pour tout kn_0 on ait $|r_k|/2$; alors on a bien $|r_{n+p}|/2$ pour nn_0 et p entier naturel. Et pour $x \in [0,1]$ et nn_0 on obtient: $\displaystyle |R_n(x)|\frac{}{2} + \frac{}{2}(1-x)\sum_{p=1}^{+\infty} x^{p-1} = .$

4.d. Continuité de la somme à gauche en 1, assurée par convergence uniforme de la série sur $[0,1]$.

5. Par contraposition, la série est divergente.

6. Par primitivation du développement de $\dfrac{1}{1+x^2}$ on obtient $\arctan(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pour $x \in\,]-1,1[$; et l'on peut[2] appliquer le théorème d'Abel pour obtenir: $\dfrac{\pi}{4} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$.

7.a La série proposée converge par critère spécial des séries alternées. Le terme général du produit de Cauchy est ici: $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^n}{\big(k(n-k)\big)^{1/4}} = (-1)^n a_n$. (poser $u_0 = v_0 = 0$)

[1] Qui est valable aussi en 1 ...
[2] Ce résultat s'obtient aussi par majoration du reste d'une série alternée vérifiant le critère spécial ...

Or $k(n-k)\frac{n^2}{4}$ (étude des variations, ou mieux: $(n-2k)^2 0$) et par conséquent $a_n \frac{\sqrt{2}(n-1)}{\sqrt{n}}$; ce qui montre que la série de terme général w_n diverge grossièrement.

7.b Puisque $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, les séries entières $\sum u_n\, x^n$ et $\sum v_n\, x^n$ ont un rayon de convergence au moins égal à 1. D'après le cours, c'est alors aussi le cas de $\sum w_n\, x^n \ldots$ Si l'on note $U(x)$, $V(x)$, $W(x)$, les sommes respectives, on a: $U(x)\,V(x) = W(x)$ pour tout $x \in [0,1[$. Mais d'après le théorème d'Abel[3] appliqué à chacune des trois séries, lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures, $U(x)$ tend vers $\sum u_n$, $V(x)$ tend vers $\sum v_n$, $W(x)$ tend vers $\sum w_n$. Par unicité de la limite, le produit des deux premières sommes est égale à la troisième

III RÉCIPROQUE DU THÉORÈME D'ABEL

8. C'est la question 1.b) !

9. Puisque les coefficients sont positifs, $\sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k f(x)$ pour tout $x \in [0,1[$;
en outre, la fonction f est croissante sur $[0,1[$, d'où $f(x) \lim_{x\to 1^-} f(x)$ pour tout $x \in [0,1[$.

On a donc: $\sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k \lim_{x\to 1^-} f(x)$ pour tout $x \in [0,1[$. En faisant tendre x vers 1 dans cette dernière inégalité, on obtient une majoration de la suite des sommes partielles de la série à termes positifs $\sum a_n$ qui converge donc.

IV SÉRIES HARMONIQUES TRANSFORMÉES

10. D'après le lemme d'Abel du programme officiel, s'il existe $r > 0$ tel que la suite de terme général $|a_n|\, r^n$ soit bornée, alors le rayon de convergence de $\sum a_n\, x^n$ est supérieur ou égal à r .
Avec $r = 1$ on voit ainsi que les deux séries considérées ont un rayon de convergence supérieur ou égal à 1. Au point 1, la première diverge grossièrement et la deuxième ne converge pas absolument; par conséquent 1 est le rayon de convergence de l'une et de l'autre.

11. Effectivement[4], on peut écrire $f(x) = \int_0^x g(t)\, ṭ$ pour $x \in]-1,1[\ \ldots$ et appliquer le théorème de Littlewood précédemment admis pour la réciproque du théorème d'Abel.

12. On a: $x^p\, g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} {}_n\, x^{n+p-1} = \sum_{k=p+1}^{+\infty} {}_{k-p}\, x^{k-1} = \sum_{k=p+1}^{+\infty} {}_k\, x^{k-1}$; par conséquent, $g(x) = \frac{{}_1 + {}_2\, x + \cdots {}_p\, x^{p-1}}{1-x^p}$
.

13. $\int_0^x \frac{1}{1-t}\, ṭ$ diverge quand x tend vers 1; tandis que $\int_0^x \frac{1-t}{1-t^2}\, ṭ$ tend vers $\ln 2 \ldots$

14. On est bien mis sur la voie par la question précédente: 1 étant racine simple du dénominateur de $g(x)$, il faut et il suffit que 1 soit racine du numérateur pour que l'intégrale soit convergente. (dans ce cas, g est prolongeable par continuité en 1) Une CNS est donc: $\sum_{i=1}^{p} {}_i = 0$.
Cela ne peut pas se produire lorsque p est impair!

15. On a ici: $g(x) = \frac{1+x+x^2-x^3-x^4-x^5}{1-x^6} = \frac{(1+x+x^2)(1-x^3)}{(1-x^3)(1+x^3)} = \frac{1+x}{1+x^3} + \frac{x^2}{1+x^3}$;
on en déduit que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{{}_n}{n} = \int_0^1 \frac{ẋ}{x^2-x+1} + \int_0^1 \frac{x^2\, ẋ}{1+x^3}$. La première intégrale (abélienne) vaut: $\int_0^1 \frac{ẋ}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} =$
Pour la seconde, on a une primitive évidente ... Le résultat final est donc: $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{3}{\ln 2}$.

---

[3] Bien entendu, cela devient trivial si les deux rayons initiaux sont strictement supérieurs à 1 ...

[4] Cela aurait du être une question préalable, même si c'est du cours ...