Devoir surveillé n° 4

CORRIGÉ

Exercice 1.

1. La fonction cotan est le quotient de la fonction $\cos$ par la fonction $\sin$, qui sont toutes deux usuellement de classe C^1 sur $]0,\pi[$. De plus, $\sin$ ne s'annule pas sur $]0,\pi[$, donc cotan est de classe C^1 sur $]0,\pi[$.
   On a : $\text{cotan}' = \dfrac{\cos' \sin - \cos \sin'}{\sin^2} = -\dfrac{\sin^2 + \cos^2}{\sin^2} = -1 - \text{cotan}^2$.

2. (a) Comme $f(0) = 0$: $\forall x \in]0,1[,\ (f(x))^2 \,\text{cotan}(\pi x) = \dfrac{f(x)}{\pi} \times \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} \times \dfrac{\pi x}{\sin(\pi x)} \times \cos(\pi x)$,
   donc, comme f, $\sin$ et $\cos$ sont de classe C^1 sur $[0,1]$:
   $$(f(x))^2 \,\text{cotan}(\pi x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{f(0)f'(0)}{\pi} \times \frac{\cos(0)}{\sin'(0)} = 0.$$
   De même : $\forall x \in]0,1[,\ (f(x))^2 \,\text{cotan}(\pi x) = \dfrac{f(x)}{\pi} \times \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} \times \dfrac{\pi x - \pi}{\sin(\pi x) - \sin(\pi)} \cos(\pi x)$,
   donc :
   $$(f(x))^2 \,\text{cotan}(\pi x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} \frac{f(1)f'(1)}{\pi} \times \frac{\cos(\pi)}{\sin'(\pi)} = 0.$$
   (b) Comme les fonctions f^2 et $x \mapsto \text{cotan}(\pi x)$ sont C^1 sur $]0,1[$, on a, par intégration par parties :
   $$I = \left[\frac{f(x)^2}{2}\text{cotan}(\pi x)\right]_0^1 + \int_0^1 \pi \frac{f(x)^2}{2}\left(1 + \text{cotan}(\pi x)^2\right) dx,$$
   d'où, d'après les limites ci-dessus : $2I = \pi \displaystyle\int_0^1 (f(x))^2 \left(1 + (\text{cotan}(\pi x))^2\right) dx.$

3. (a) On a : $\forall x \in]0,1[,\ (f'(x) - \pi f(x)\text{cotan}(\pi x))^2 \geq 0$, donc, par positivité de l'intégrale : $J \geq 0$.
   (b) On a, en développant J :
   $$\begin{aligned} J &= \int_0^1 (f'(x))^2\,dx - 2\pi I + \pi^2 \int_0^1 (f(x))^2 (\text{cotan}(\pi x))^2\,dx \\ &= \int_0^1 (f'(x))^2\,dx - \pi^2 \int_0^1 (f(x))^2 \left(1 + (\text{cotan}(\pi x))^2\right) dx + \pi^2 \int_0^1 (f(x))^2 (\text{cotan}(\pi x))^2\,dx \\ &= \int_0^1 (f'(x))^2\,dx - \pi^2 \int_0^1 (f(x))^2\,dx. \end{aligned}$$
   Comme $J \geq 0$, on trouve bien l'inégalité voulue : $\displaystyle\int_0^1 (f(x))^2\,dx \leq \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 (f'(x))^2\,dx.$

4. (a) L'équation considérée est une équation différentielle linéaire d'ordre 1, homogène, de coefficient $a : x \mapsto \pi\,\text{cotan}(\pi x) = \dfrac{\pi\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ en posant $u : x \mapsto \sin(\pi x)$. Une primitive de a sur $]0,1[$ est donc $A : x \mapsto \ln|\sin(\pi x)| = \ln(\sin(\pi x))$. L'ensemble des solutions de l'équation est donc :
   $$S = \{y : x \mapsto \lambda \sin(\pi x) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$
   (b) Il y a égalité de Poincaré lorsque $J = 0$, c'est-à-dire, par définie positivité de l'intégrale, lorsque f est solution de l'équation ci-dessus ; c'est-à-dire, comme ces solutions vérifient toutes les hypothèses sur f, qu'il y a égalité lorsque $f : x \mapsto \lambda\sin(\pi x),\ \lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.

On applique la méthode du pivot :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & az & = & 2 \\ 2x & + & ay & + & 2z & = & 3 \end{array}\right. \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1, \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 1 \\ & & y & + & (a+1)z & = & 1 \\ & & (a-2)y & + & 4z & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - (a-2)L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 1 \\ & & y & + & (a+1)z & = & 1 \\ & & & & (3-a)(2+a)z & = & 3-a \end{array}\right. \quad (*)$$

$$\underset{\substack{\text{si } a \neq -2 \text{ et } a \neq 3\ : \\ L_3 \leftarrow \frac{L_3}{(3-a)(2+a)}, \\ L_2 \leftarrow L_2 - (a+1)L_3, \\ L_1 \leftarrow L_1 + L_3}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 1 + \frac{1}{2+a} \\ & & y & = & \frac{1}{2+a} \\ & & z & = & \frac{1}{2+a} \end{array}\right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & \frac{1}{2+a} \\ z & = & \frac{1}{2+a} \end{array}\right. .$$

donc, si $a \neq -2$ et $a \neq 3$, le système est de Cramer et a pour unique solution :

$$S = \left\{ \left(1, \frac{1}{2+a}, \frac{1}{2+a}\right) \right\}.$$

Si $a = -2$: alors, dans $(*)$, la troisième ligne est une condition de compatibilité non vérifiée, donc $S = \emptyset$.
Si $a = 3$: alors la condition de compatibilité est vérifiée, et :

$$(*) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & & & - & 5z & = & 0 \\ & & y & + & 4z & = & 1 \end{array}\right. ,$$

donc le système admet 2 pivots et 1 paramètre. L'ensemble de ses solutions est la droite de $\mathbb{R}^3$:

$$S = \{(5z, 1-4z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = (0,1,0) + \mathbb{R}(5,-4,1).$$

Exercice 3.

1. Soit f une fonction vérifiant l'égalité indiquée. La fonction f' est alors composée de fonctions dérivables, donc dérivable et : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f''(x) = -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} f(x)$, donc f est solution de l'équation
$$(E)\ :\ x^2 f'' + f = 0.$$

2. La fonction z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
$\forall t \in \mathbb{R}$, $z'(t) = e^t f'(e^t)$, puis $z''(t) = e^t f'(e^t) + e^{2t} f''(e^t)$, donc :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ z''(t) - z'(t) + z(t) = x^2 f''(x) + f(x) = 0.$$

3. C'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, homogène, d'équation caractéristique $r^2 - r + 1 = 0$, de racines $r_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Elle a donc pour solutions :
$$\left\{ z : t \mapsto e^{\frac{t}{2}} \left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) \right) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\},$$
donc l'équation (E) a pour solutions (en remplaçant $t = \ln x$) :
$$\left\{ f : x \mapsto \sqrt{x} \left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) \right) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

4. Soit f une fonction de la forme ci-dessus. Alors : $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) \right) \\ &\quad + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{x}}{x} \left(-\lambda \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) + \mu \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) \right) \\ &= \frac{\lambda + \sqrt{3}\mu}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) + \frac{\mu - \sqrt{3}\lambda}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) \end{aligned}$$
et $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) - \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) \right)$, donc f vérifie l'équation de départ si et seulement si :
$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\lambda + \sqrt{3}\mu}{2} &=& \lambda \\ \frac{\mu - \sqrt{3}\lambda}{2} &=& -\mu \end{array} \right., \text{ c'est-à-dire } \left\{ \begin{array}{rcl} -\frac{1}{2}\lambda + \frac{\sqrt{3}}{2}\mu &=& 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda + \frac{3}{2}\mu &=& 0 \end{array} \right., \text{ c'est-à-dire } \lambda = \sqrt{3}\mu.$$
L'ensemble des solutions de l'égalité de départ est donc :
$$\left\{ f : x \mapsto \mu\sqrt{x} \left(\sqrt{3} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) + \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) \right) \mid \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Problème.

I. 1. Comme $\det P = 1\times 2 - 1\times 1 = 1 \neq 0$, la matrice P est inversible. D'après la formule du cours : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. On a $AP = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$, d'où $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = D$.

3. D'après la question précédente, $A = PDP^{-1}$, donc par une récurrence immédiate :
$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-3^n & -1+3^n \\ 2-2\times 3^n & -1+2\times 3^n \end{pmatrix}$.

II. 1. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, $AX_n = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_n+2v_n \\ -4u_n+5v_n \end{pmatrix} = X_{n+1}$.

2. D'après la question précédente, par récurrence immédiate, on a :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\ X_n &= A^n X_0 \\ &= \begin{pmatrix} 2-3^n & -1+3^n \\ 2-2\times 3^n & -1+2\times 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (2-3^n)u_0 + (-1+3^n)v_0 \\ (2-2\times 3^n)u_0 + (-1+2\times 3^n)v_0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N},\ \left\{ \begin{array}{rcl} u_n &=& 3^n(v_0-u_0)+2u_0-v_0 \\ v_n &=& 2\times 3^n(v_0-u_0)+2u_0-v_0 \end{array} \right.$.

3. Comme la suite (3^n) est croissante et tend vers $+\infty$:

- si $v_0-u_0>0$, alors (u_n) et (v_n) sont croissantes et tendent vers $+\infty$,
- si $v_0-u_0<0$, alors (u_n) et (v_n) sont décroissantes et tendent vers $-\infty$,
- si $v_0-u_0=0$, alors (u_n) et (v_n) sont constantes égales à $2u_0-v_0=u_0$.

III. 1. On a $Y' = AY = PDP^{-1}Y$ d'après les questions précédentes, d'où $F' = P^{-1}Y' = DP^{-1}Y = PF$.

2. Comme $DF = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ 3g \end{pmatrix}$, les fonctions f et g vérifient les équations respectives $f'=f$ et $g'=3g$.

3. Les solutions des équations ci-dessus sont classiquement les $f : x \mapsto \lambda e^x$ et $g : x \mapsto \mu e^{3x}$ pour $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. On a alors : $Y = PF = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f+g \\ f+2g \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $y = f+g$ et $z = f+2g$, donc :

$$S = \left\{ \left\{ \begin{array}{rcl} y : x &\mapsto& \lambda e^x + \mu e^{3x} \\ z : x &\mapsto& \lambda e^x + 2\mu e^{3x} \end{array} \right. \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$