Devoir surveillé n$^\circ$ 4

Durée : 3 heures. Calculatrices non autorisées.
La notation tiendra largement compte de la qualité de la rédaction.
Les résultats doivent être encadrés. Il est inutile de recopier l'énoncé.
Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre souhaité.
Les exercices qui ne sont pas traités dans l'ordre doivent être rédigés sur des copies séparées.
Le sujet et le brouillon ne sont pas à rendre. Le barème est indicatif.

Exercice 1. *(8 points)* On considère une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1, telle que $f(0) = f(1) = 0$. On définit la fonction $\mathrm{cotan} = \dfrac{\cos}{\sin}$, et on note :

$$I = \int_0^1 f(x)f'(x)\mathrm{cotan}(\pi x)dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^1 \left(f'(x) - \pi f(x)\mathrm{cotan}(\pi x)\right)^2 dx.$$

1. Montrer que la fonction cotan est de classe C^1 sur $]0,\pi[$, et que $\mathrm{cotan}' = -1 - \mathrm{cotan}^2$.
2. (a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} (f(x))^2 \mathrm{cotan}(\pi x) = 0$, puis que $\lim\limits_{x\to 1} (f(x))^2 \mathrm{cotan}(\pi x) = 0$.

   Indication : Décomposer $(f(x))^2 \mathrm{cotan}(\pi x) = \dfrac{f(x)}{\pi} \times \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} \times \dfrac{\pi x}{\sin(\pi x)} \times \cos(\pi x)$.

   (b) En déduire, par intégration par parties, que : $2I = \pi \displaystyle\int_0^1 (f(x))^2 \left(1 + (\mathrm{cotan}(\pi x))^2\right) dx$.
3. (a) Montrer que : $J \geq 0$.

   (b) Développer J. En déduire l'*inégalité de Poincaré* : $\displaystyle\int_0^1 (f(x))^2 dx \leq \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 (f'(x))^2 dx$.
4. (a) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle :

$$\forall x \in]0,1[,\ y'(x) = \pi\, \mathrm{cotan}(\pi x)\, y(x).$$

   (b) En déduire les fonctions pour lesquelles l'inégalité de Poincaré est une égalité.

Exercice 2. *(6 points)* Soit a dans $\mathbb{R}$. En utilisant l'algorithme du pivot de Gauss-Jordan, résoudre le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y - z &=& 1 \\ x + 2y + az &=& 2 \\ 2x + ay + 2z &=& 3 \end{array} \right. .$$

On décrira, selon les valeurs de a, l'ensemble des solutions obtenu.

Exercice 3. *(8 points)* On veut déterminer les fonctions dérivables $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right).$$

1. Montrer qu'une telle fonction f est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 (à coefficients non constants) à déterminer, notée (E).
2. En posant alors $x = e^t$, et $z : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(e^t) \end{array} \right.$, montrer que $z'' - z' + z = 0$.
3. Résoudre cette équation, et en déduire les solutions de (E).
4. Parmi les solutions de (E), quelles sont celles qui vérifient l'égalité de départ ?

Problème. *(12 points)* On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

I. 1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
   2. Vérifier que $D = P^{-1}AP$.
   3. En déduire A^n pour tout n dans $\mathbb{N}$.

II. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{ccc} u_{n+1} & = & -u_n + 2v_n \\ v_{n+1} & = & -4u_n + 5v_n \end{array} \right. .$$

On note, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n$.
2. En déduire une écriture explicite de u_n et v_n en fonction de u_0 et v_0.
3. Étudier le comportement de ces suites.

III. On considère le système différentiel d'inconnues $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$(E) : \left\{ \begin{array}{ccc} y' & = & -y + 2z \\ z' & = & -4y + 5z \end{array} \right. .$$

On note $Y = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $F = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ tels que $F = P^{-1}Y$.

1. Montrer que $F' = DF$.
2. En déduire les équations différentielles vérifiées par f et g.
3. Résoudre ces équations, et en déduire les solutions de (E).