Devoir à la maison n° 6
CORRIGÉ

Exercice 1.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. La décomposition $f = y + z$, où y est paire et z est impaire, existe car $y : t \mapsto \dfrac{f(t)+f(-t)}{2}$ et $z : t \mapsto \dfrac{f(t)-f(-t)}{2}$ conviennent, et est unique car $y_1 + z_1 = y_2 + z_2 \Rightarrow y_1 - y_2 = z_2 - z_1 = 0$ (car la seule fonction à la fois paire et impaire est la fonction nulle) $\Rightarrow y_1 = y_2$ et $z_1 = z_2$.
2. On a : $\forall t \in \mathbb{R},\ f(-t) = y(-t) + z(-t) = y(t) - z(t)$, d'où l'équation :
$$y'' + z'' + y - z = 2\text{sh}(t) + \cos(3t),$$
où y'', y et $t \mapsto \cos(3t)$ sont paires et z'', z et $t \mapsto 2\text{sh}(t)$ sont impaires. Par identification, y et z vérifient donc les équations indiquées.
3. • Résolvons (E_1) : l'équation homogène $y_h'' + y_h = 0$ a pour solutions :
$$\{y_h : t \mapsto \lambda\cos(t) + \mu\sin(t) \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}\},$$
et une solution particulière y_p est donnée par la partie réelle de Y_p solution de $Y'' + Y = e^{3it}$, dans laquelle $3i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2 + 1 = 0$, donc on peut chercher Y_p sous la forme $Y_p : t \mapsto ke^{3it}$, avec $k = \dfrac{1}{(3i)^2+1} = -\dfrac{1}{8}$. Donc $y_p : t \mapsto -\dfrac{1}{8}\cos(3t)$ convient, donc les solutions de (E_1) sont les
$$\left\{y : t \mapsto \lambda\cos(t) + \mu\sin(t) - \frac{1}{8}\cos(3t) \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}\right\}.$$
   • Résolvons (E_2) : l'équation homogène $z_h'' - z_h = 0$ a pour solutions :
$$\{z_h : t \mapsto \lambda\text{ch}(t) + \mu\text{sh}(t) \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}\},$$
et une solution particulière z_p est donnée par superposition de $z_{p,1}$ solution de $z'' - z = e^t$, et de $z_{p,2}$ solution de $z'' - z = -e^{-t}$. Pour $z_{p,1}$, 1 est racine de l'équation caractéristique, donc on cherche $z_{p,1}$ sous la forme $z_{p,1} : t \mapsto kte^t$, avec $k = \dfrac{1}{2\times 1} = \dfrac{1}{2}$; et de même $z_{p,2} : t \mapsto kte^{-t}$, avec $k = \dfrac{-1}{2\times(-1)} = \dfrac{1}{2}$, d'où $z_p : t \mapsto \dfrac{1}{2}te^t + \dfrac{1}{2}te^{-t} = t\text{ch}(t)$ convient. Donc les solutions de (E_2) sont les
$$\{z : t \mapsto \lambda\text{ch}(t) + \mu\text{sh}(t) + t\text{ch}(t) \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}\}.$$
4. On rassemble les solutions *paires* de (E_1) et les solutions *impaires* de (E_2) pour former les solutions de (E), soit :
$$\left\{f : t \mapsto \lambda\cos(t) - \frac{1}{8}\cos(3t) + \mu\text{sh}(t) + t\text{ch}(t) \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}\right\}.$$

Exercice 2.

1. On applique la méthode du pivot :

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} \boxed{x} & +y & +z & = & 3 \\ x & +\lambda y & +\lambda^2 z & = & \lambda^2 \\ x & +3y & +9z & = & 9 \end{array}\right. \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rrrcl} \boxed{x} & +y & +z & = & 3 \\ & (\lambda-1)y & +(\lambda^2-1)z & = & \lambda^2-3 \\ & 2y & +8z & = & 6 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftrightarrow L_3 \\ L_2 \leftarrow \frac{L_2}{2}}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rrrcl} \boxed{x} & +y & +z & = & 3 \\ & \boxed{y} & +4z & = & 3 \\ & (\lambda-1)y & +(\lambda^2-1)z & = & \lambda^2-3 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - (\lambda-1)L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rrrcl} \boxed{x} & +y & +z & = & 3 \\ & \boxed{y} & +4z & = & 3 \\ & & (\lambda^2-4\lambda+3)z & = & \lambda^2-3\lambda \end{array}\right.$$

$$\underset{\boxed{*}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rrrcl} \boxed{x} & +y & +z & = & 3 \\ & \boxed{y} & +4z & = & 3 \\ & & (\lambda-1)(\lambda-3)z & = & \lambda(\lambda-3) \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow \frac{L_3}{(\lambda-1)(\lambda-3)} \\ \textbf{si } \lambda \neq 1,3}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rrrcl} \boxed{x} & +y & +z & = & 3 \\ & \boxed{y} & +4z & = & 3 \\ & & \boxed{z} & = & \frac{\lambda}{\lambda-1} \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 4L_3}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rrrcl} \boxed{x} & +y & & = & \frac{2\lambda-3}{\lambda-1} \\ & \boxed{y} & & = & \frac{-\lambda-3}{\lambda-1} \\ & & \boxed{z} & = & \frac{\lambda}{\lambda-1} \end{array}\right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rrrcl} \boxed{x} & & & = & \frac{3\lambda}{\lambda-1} \\ & \boxed{y} & & = & \frac{-\lambda-3}{\lambda-1} \\ & & \boxed{z} & = & \frac{\lambda}{\lambda-1} \end{array}\right. .$$

Si $\lambda \neq 1, 3$, on a donc : $S = \left\{\left(\dfrac{3\lambda}{\lambda-1}, \dfrac{-\lambda-3}{\lambda-1}, \dfrac{\lambda}{\lambda-1}\right)\right\}$.

Si $\lambda = 1$, la troisième ligne du système $\boxed{*}$ s'écrit : $0 = -2$, ce qui est faux, donc le système n'a pas de solution : $S = \emptyset$.

Si $\lambda = 3$, la troisième ligne du système $\boxed{*}$ s'écrit : $0 = 0$, ce qui est vrai, donc :

$$\boxed{*} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcl} \boxed{x} & +y & +z & = & 3 \\ & \boxed{y} & +4z & = & 3 \end{array}\right. \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rrrcl} \boxed{x} & & -3z & = & 0 \\ & \boxed{y} & +4z & = & 3 \end{array}\right. ,$$

donc si $\lambda = 3$, $S = \{(3z, 3-4z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

2. On est dans le cas $\lambda = -1$, donc d'après le résultat précédent : $S = \left\{\left(\dfrac{3}{2}, 1, \dfrac{1}{2}\right)\right\}$.