Feuille d'exercices 10
ÉLÉMENTS DE CORRECTION

Exercice 1.

(c) Ce système est de rang 3. Il a 3 pivots, 0 paramètre, et 1 ligne de compatibilité vérifiée.
Son ensemble des solutions est un point de $\mathbb{R}^3$: $S = \{(1, -1, 2)\}$.

(d) Ce système est de rang 2. Il a 2 pivots, 2 paramètres et 0 ligne de compatibilité.
Son ensemble des solutions est un plan de $\mathbb{R}^4$:
$S = \{(5y - 2t, y, -6y + 3t, t)\} = \mathbb{R}(5, 1, -6, 0) + \mathbb{R}(-2, 0, 3, 1)$.
C'est le plan de vecteurs directeurs $(5, 1, -6, 0)$ et $(-2, 0, 3, 1)$ et passant par l'origine $(0, 0, 0, 0)$.

(i) Ce système est de rang 3. Il a 3 pivots, 0 paramètre, et 0 ligne de compatibilité.
C'est donc un système de Cramer.
Son ensemble des solutions est un point de $\mathbb{R}^3$: $S = \{(-66, 69, -11)\}$.

Exercice 2.

(b)
- Si $b \neq 0, a \neq 2$ et $a \neq -4$: Ce système est de rang 3. Il a 3 pivots, 0 paramètre, et 0 ligne de compatibilité. C'est donc un système de Cramer.
  Son ensemble des solutions est un point de $\mathbb{R}^3$: $S = \left\{ \dfrac{1}{b(a-2)(a+4)} \left(b(a-2b), ab + 2b - 4, b(2b-a)\right) \right\}$.
- Si $b = 0$:
  — Si $a \neq 2$: Ce système est de rang 2. Il a 2 pivots, 1 paramètre, et 1 ligne de compatibilité qui n'est pas vérifiée. Donc $S = \emptyset$.
  — Si $a = 2$: Ce système est de rang 1. Il a 1 pivot, 2 paramètres, et 2 lignes de compatibilité qui ne sont pas vérifiées. Donc $S = \emptyset$.
- Si $a = 2$: Ce système est de rang 1. Il a 1 pivot, 2 paramètres, et 2 lignes de compatibilité qui sont vérifiées si et seulement si $b = 1$:
  — Si $b \neq 1$: $S = \emptyset$,
  — Si $b = 1$: $S = \left\{ \left(x, y, \dfrac{1}{2} - x - y\right) \right\}$. C'est le plan de $\mathbb{R}^3$ de vecteurs directeurs $(1, 0, -1)$ et $(0, 1, -1)$ passant par le point $\left(\dfrac{1}{2}, 0, 0\right)$.
- Si $a = -4$: Ce système est de rang 2. Il a 2 pivots, 1 paramètre, et 1 ligne de compatibilité qui est vérifiée si et seulement si $b = -2$:
  — Si $b \neq -2$: $S = \emptyset$,
  — Si $b = -2$: $S = \left\{ \left(z, -\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}z, z\right) \right\}$. C'est la droite de $\mathbb{R}^3$ de vecteur directeur $(2, 1, 2)$ passant par le point $\left(0, -\dfrac{1}{4}, 0\right)$.

(c)
- Si $m \neq 0, 2, -2$: Ce système est de rang 3. Il a 3 pivots, 0 paramètre, et 0 ligne de compatibilité. C'est donc un système de Cramer.
  Son ensemble des solutions est un point de $\mathbb{R}^3$: $S = \left\{ \dfrac{1}{m-2} (-5, 3m - 1, -m - 2) \right\}$.

- Si $m=-2$: Ce système est de rang 2. Il a 2 pivots, 1 paramètre, et 1 ligne de compatibilité qui est vérifiée. Son ensemble des solutions est une droite de $\mathbb{R}^3$: $S=\{(-y,y,0)\}=\mathbb{R}(-1,1,0)$. C'est la droite de $\mathbb{R}^3$ de vecteur directeur $(-1,1,0)$ passant par l'origine.
- Si $m=0$: Ce système est de rang 2. Il a 2 pivots, 1 paramètre, et 1 ligne de compatibilité qui est vérifiée. Son ensemble des solutions est une droite de $\mathbb{R}^3$: $S=\{(4-3y,y,-2+2y)\}=\mathbb{R}(-3,1,2)+(4,0,-2)$. C'est la droite de $\mathbb{R}^3$ de vecteur directeur $(-3,1,2)$ passant par le point $(4,0,-2)$.
- Si $m=2$: Ce système est de rang 2. Il a 2 pivots, 1 paramètre, et 1 ligne de compatibilité qui n'est pas vérifiée. Donc $S=\emptyset$.

Exercice 3.

(e) $AB=\begin{pmatrix}1 & 7 & -2\\ 6 & 5 & 7\end{pmatrix}$,

et le produit BA n'est pas défini.

(f) $AB=\begin{pmatrix}-3 & 2 & -1\\ -5 & 2 & -3\\ -5 & 2 & -3\end{pmatrix}$,

$BA=\begin{pmatrix}2 & -2 & 2\\ 5 & -3 & 5\\ -3 & 1 & -3\end{pmatrix}$.

Exercice 5.

(a) Soit M une solution. Alors :

$$M\times A=M\times M^2=M^3=M^2\times M=A\times M,$$

donc M et A commutent.

(b) Notons $M=\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}$ une solution. Comme $AM=MA$, on a : $\begin{cases} a+g &= a\\ 4d+2g &= g\\ 9g &= g\\ b+h &= 4b\\ 9h &= 4h\end{cases}$,

donc $b=d=g=h=0$. Donc : $M=\begin{pmatrix}a & 0 & c\\ 0 & e & f\\ 0 & 0 & i\end{pmatrix}$.

On en déduit : $M^2=\begin{pmatrix}a^2 & 0 & c(a+i)\\ 0 & e^2 & f(e+i)\\ 0 & 0 & i^2\end{pmatrix}$, donc : $M^2=A\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 &= 1\\ e^2 &= 4\\ i^2 &= 9\\ c(a+i) &= 1\\ f(e+i) &= 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= \pm 1\\ e &= \pm 2\\ i &= \pm 3\\ c &= \frac{1}{a+i}\\ f &= \frac{2}{e+i}\end{cases}$.

Les « racines carrées » de A sont donc les éléments de l'ensemble

$$S=\left\{\begin{pmatrix}a & 0 & \dfrac{1}{a+i}\\ 0 & e & \dfrac{2}{e+i}\\ 0 & 0 & i\end{pmatrix} \mid a=\pm 1,\ e=\pm 2,\ i=\pm 3\right\}.$$

Il y a en a 8 !