Devoir à la maison n° 6

Exercice 1. On veut déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$(E) \ : \ \forall t \in \mathbb{R}, \quad f''(t) + f(-t) = 2\mathrm{sh}(t) + \cos(3t).$$

1. Justifier que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se décompose de manière unique en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
2. On appelle y et z respectivement les parties paire et impaire d'une fonction f vérifiant (E). Montrer qu'elles vérifient les équations :

$$(E_1) \ : \ y'' + y = \cos(3t), \quad (E_2) \ : \ z'' - z = 2\mathrm{sh}(t).$$

3. Résoudre (E_1), puis (E_2).
4. En déduire les solutions de (E).

Exercice 2.
1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. En utilisant la méthode du pivot, déterminer, selon la valeur de λ, l'ensemble des solutions du système linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 3 \\ x + \lambda y + \lambda^2 z & = & \lambda^2 \\ x + 3y + 9z & = & 9 \end{array} \right. .$$

2. En déduire l'ensemble des solutions du système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 3 \\ x - y + z & = & 1 \\ x + 3y + 9z & = & 9 \end{array} \right. .$$