Feuille d'exercices 9
ÉLÉMENTS DE CORRECTION

Exercice 1.

(e) Cette équation différentielle linéaire d'ordre 1 a pour équation homogène associée :

$$y_h' - \frac{1}{1+e^{-t}} y_h = 0,$$

c'est-à-dire : $y_h' = \frac{1}{1+e^{-t}} y_h = \frac{e^t}{1+e^t} y_h$, de solutions les $y_h : t \mapsto \lambda e^{\int \frac{e^t}{1+e^t} dt} = \lambda e^{\ln|1+e^t|} = \lambda(1+e^t),\ \lambda \in \mathbb{R}$.
Une solution particulière de l'équation de départ est $y_p : t \mapsto \lambda(t)(1+e^t)$ avec $\lambda'(t)(1+e^t) = \frac{e^t}{1+e^t}$, c'est-à-dire $\lambda'(t) = \frac{e^t}{(1+e^t)^2}$. Donc $\lambda : t \mapsto -\frac{1}{1+e^t}$, donc $y_p : t \mapsto -1$ convient (ce que l'on vérifie aisément).
Donc les solutions de l'équation de départ sont les $y : t \mapsto \lambda(1+e^t) - 1,\ \lambda \in \mathbb{R}$.
La condition initiale $y(0) = 3$ s'écrit $2\lambda - 1 = 3$, c'est-à-dire $\lambda = 2$. Donc :

$$S = \left\{ y : t \mapsto 2(1+e^t) - 1 = 2e^t + 1 \right\}.$$

(f) Cette équation différentielle linéaire d'ordre 1 a pour équation homogène associée :

$$y_h' - y_h = 0,$$

c'est-à-dire : $y_h' = y_h$, de solutions les $y_h : t \mapsto \lambda e^t,\ \lambda \in \mathbb{R}$.
Une solution particulière de l'équation de départ est $y_p : t \mapsto \lambda(t)e^t$ avec $\lambda'(t)e^t = \frac{1}{1+e^{2t}}$, c'est-à-dire $\lambda'(t) = \frac{e^{-t}}{1+e^{2t}}$. Donc $\lambda : t \mapsto \int \frac{e^{-t}}{1+e^{2t}} dt \underset{x=e^t}{=} \int \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = -\frac{1}{x} - \arctan(x) = -e^{-t} - \arctan(e^t)$ convient, donc $y_p : t \mapsto -1 - e^t \arctan(e^t)$ convient.
Donc les solutions de l'équation de départ sont les $y : t \mapsto \lambda e^t - 1 - e^t \arctan(e^t),\ \lambda \in \mathbb{R}$.
La condition initiale $y(0) = \frac{\pi}{4}$ s'écrit $\lambda - 1 - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$, c'est-à-dire $\lambda = \frac{\pi}{2} + 1$. Donc :

$$S = \left\{ y : t \mapsto \left(\frac{\pi}{2} + 1 \right) e^t - 1 - e^t \arctan(e^t) \right\}.$$

Exercice 2.

(c) Cette équation est définie sur $\mathbb{R}$. De plus, $t(t-2)$ s'annule quand $t = 0$ ou 2, donc cette équation est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 sur $I_1 =]-\infty, 0[$, $I_2 =]0, 2[$ ou $I_3 =]2, +\infty[$.
Sur chacun de ces intervalles, l'équation s'écrit :

$$y' - \frac{2}{t(t-2)} y = \frac{(t-1)(t-3)}{t(t-2)}.$$

L'équation homogène associée :

$$y_h' - \frac{2}{t(t-2)}y_h = 0,$$

a pour solutions les $y_h : t \mapsto \lambda e^{\int \frac{2}{t(t-2)}dt} = \lambda e^{\int \left(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t}\right)dt} = \lambda \left|\frac{t-2}{t}\right|, \ \lambda \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire, puisque λ parcourt $\mathbb{R}$, les $y_h : t \mapsto \lambda \frac{t-2}{t}, \ \lambda \in \mathbb{R}$.

Une solution particulière de l'équation de départ est $y_p : t \mapsto \lambda(t)\frac{t-2}{t}$ avec $\lambda'(t)\frac{t-2}{t} = \frac{(t-1)(t-3)}{t(t-2)}$, c'est-à-dire $\lambda'(t) = \frac{(t-1)(t-3)}{(t-2)^2} = \frac{(t-2)^2-1}{(t-2)^2} = 1 - \frac{1}{(t-2)^2}$, donc $\lambda : t \mapsto t + \frac{1}{t-2}$ convient, donc $y_p : t \mapsto t - 2 + \frac{1}{t}$ convient.

Les solutions de l'équation sur chaque intervalle sont donc les $y : t \mapsto \lambda\frac{t-2}{t} + t - 2 + \frac{1}{t} = \lambda - 2 + t + \frac{1-2\lambda}{t}, \ \lambda \in \mathbb{R}$.

La seule solution continue en 0 est celle pour laquelle $1 - 2\lambda = 0$, c'est-à-dire $\lambda = \frac{1}{2}$. Cette solution est usuellement infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, donc :

$$S = \left\{ y : t \mapsto t - \frac{3}{2} \right\}.$$

(d) Cette équation est définie sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $2t(\sqrt{t}+1)$ s'annule quand $t = 0$, donc cette équation est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
Sur cet intervalle, l'équation s'écrit :

$$y' - \frac{2\sqrt{t}+1}{t(\sqrt{t}+1)}y = 0.$$

C'est une équation homogène, de solutions les $y : t \mapsto \lambda e^{\int \frac{2\sqrt{t}+1}{t(\sqrt{t}+1)}dt}, \ \lambda \in \mathbb{R}$. Or :

$$\begin{aligned} \int \frac{2\sqrt{t}+1}{t(\sqrt{t}+1)}dt &\underset{x=\sqrt{t}}{=} \int \frac{2x+1}{x(x+1)}dx = \int (2x+1)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx \\ &= \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\right)dx = \ln|x(x+1)| = \ln\left(\sqrt{t}(\sqrt{t}+1)\right), \end{aligned}$$

donc les solutions de l'équation sont les $y : t \mapsto \lambda\sqrt{t}(\sqrt{t}+1) = \lambda t + \lambda\sqrt{t}$.
La seule solution dérivable en 0 est celle pour laquelle $\lambda = 0$, donc :

$$S = \{y : t \mapsto 0\}.$$

Exercice 3. On procède par analyse-synthèse :

- Soit f une solution. En dérivant l'identité par rapport à y, on a :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f'(x+y) = f(x)f'(y),$$

donc en particulier :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \alpha f(x),$$

avec $\alpha = f'(0)$. Donc f est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène, de solutions les $f : x \mapsto \lambda e^{\alpha x}$. On a alors $f'(x) = \lambda\alpha e^{\alpha x}$, donc $f'(0) = \lambda\alpha$, donc la condition $\alpha = f'(0)$ s'écrit $\lambda = 1$ ou $\alpha = 0$. Donc $f : x \mapsto e^{\alpha x},\ \alpha \in \mathbb{R}$, ou $f : x \mapsto \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

- Réciproquement, si $f : x \mapsto e^{\alpha x},\ \alpha \in \mathbb{R}$, alors f est solution ; et si $f : x \mapsto \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$, alors f est solution si et seulement si $\lambda = \lambda^2$, c'est-à-dire $\lambda = 0$ ou 1 (ce dernier cas se confond avec le cas $\alpha = 0$).

Finalement :

$$S = \{f : x \mapsto 0,\ f : x \mapsto e^{\alpha x} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 4. On procède par analyse-synthèse :

- Soit f une solution. En dérivant l'identité par rapport à y, on a :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \quad xf'(xy) = f'(y),$$

donc en particulier :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{\alpha}{x},$$

avec $\alpha = f'(1)$. Donc $f : x \mapsto \alpha\ln(x) + c,\ \alpha, c \in \mathbb{R}$. La condition $\alpha = f'(1)$ est automatiquement vérifiée.

- Réciproquement, si $f : x \mapsto \alpha\ln(x)+c,\ \alpha, c \in \mathbb{R}$, alors : ($f$ est solution)$\Leftrightarrow$ ($\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*,\ \alpha\ln(xy) + c = \alpha\ln(x) + \alpha\ln(y) + 2c$) $\Leftrightarrow c = 2c \Leftrightarrow c = 0$.

Finalement :

$$S = \{f : x \mapsto \alpha\ln(x) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 5. Il s'agit d'un problème de Cauchy d'ordre 1, qui, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, admet une et une seule solution.

On pose $x = \sin(t)$ et $y(t) = z(x) = z(\sin t)$, alors : $y'(t) = \cos(t)z'(x)$, donc :

$$z'(x) = \frac{z(x)}{\cos^2 t} = \frac{z(x)}{1 - x^2}.$$

Donc $z : x \mapsto \lambda e^{\int \frac{dx}{1-x^2}},\ \lambda \in \mathbb{R}$. Or :

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)dx = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),$$

donc $z : x \mapsto \lambda\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}},\ \lambda \in \mathbb{R}$, donc $y : t \mapsto \lambda\sqrt{\dfrac{1+\sin t}{1-\sin t}},\ \lambda \in \mathbb{R}$.

La condition initiale $y(0) = 1$ s'écrit $\lambda = 1$, donc :

$$S = \left\{y : t \mapsto \sqrt{\frac{1+\sin t}{1-\sin t}}\right\}.$$

Exercice 6.

(c) L'équation (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2, à coefficients constants. Ses solutions sont les $y = \mathrm{Re}(Y)$, où Y est solution de l'équation :

$$Y'' - 2Y' + Y = e^{i2t}.$$

Le polynôme caractéristique associé est $P(r) = r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2$, de racine double $r_0 = 1$.
Les solutions de l'équation homogène sont donc les $Y_h : t \mapsto (\lambda t + \mu)e^t,\ \lambda, \mu \in \mathbb{C}$, et une solution particulière est $Y_p : t \mapsto \dfrac{1}{P(2i)} e^{i2t} = \dfrac{1}{-3-4i} e^{i2t} = \left(-\dfrac{3}{25} + \dfrac{4}{25} i\right)(\cos(2t) + i\sin(2t))$, donc :

$$S_{(E)} = \left\{ y : t \mapsto (\lambda t + \mu)e^t - \frac{3}{25}\cos(2t) - \frac{4}{25}\sin(2t) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Soit $y \in S$, on a alors :

- $y(0) = 0 \Leftrightarrow \mu - \dfrac{3}{25} = 0$,
- $y'(0) = 0 \Leftrightarrow \lambda + \mu - \dfrac{8}{25} = 0$ d'où :

$$S = \left\{ y : t \mapsto \left(\frac{t}{5} + \frac{3}{25}\right) e^t - \frac{3}{25}\cos(2t) - \frac{4}{25}\sin(2t) \right\}.$$

(d) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2, à coefficients constants. Ses solutions sont les $y = \mathrm{Re}(Y)$, où Y est solution de l'équation :

$$Y'' - 2Y' - 3Y = e^{(-1+i)t}.$$

Le polynôme caractéristique associé est $P(r) = r^2 - 2r - 3$, de discriminant $\Delta = 16$, donc de racines $r_{1,2} = \dfrac{2 \pm 4}{2} = -1$ ou 3.
Les solutions de l'équation homogène sont donc les $Y_h : t \mapsto \lambda e^{-t} + \mu e^{3t},\ \lambda, \mu \in \mathbb{C}$, et une solution particulière est $Y_p : t \mapsto \dfrac{1}{P(-1+i)} e^{(-1+i)t} = \dfrac{1}{-1+3i} e^{-t} e^{it} = \left(-\dfrac{1}{10} - \dfrac{3}{10} i\right) e^{-t}(\cos(t) + i\sin(t))$, donc :

$$S = \left\{ y : t \mapsto \lambda e^{-t} + \mu e^{3t} + e^{-t}\left(-\frac{1}{10}\cos(t) + \frac{3}{10}\sin(t)\right) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

(e) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2, à coefficients constants, d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Le polynôme caractéristique associé est $P(r) = r^2 - r + (1+i)$, de discriminant $\Delta = -3 - 4i = (x+iy)^2$ avec $x^2 - y^2 = -3$, $2xy = -4$ et $x^2 + y^2 = |\Delta| = 5$, donc $x^2 = 1$ et $y^2 = 4$ avec $xy < 0$, donc $\Delta = (1-2i)^2$. Donc $P(r)$ a pour racines $r_{1,2} = \dfrac{1 \pm (1-2i)}{2} = 1 - i$ ou i.
Donc

$$S = \left\{ y : t \mapsto \lambda e^{(1-i)t} + \mu e^{it} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{C} \right\}.$$

(f) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2, à coefficients constants. L'équation homogène a pour solutions usuelles les $y_h : t \mapsto \lambda\cos(t) + \mu\sin(t),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Comme $2\mathrm{sh}\ (t) = e^t - e^{-t}$, une solution particulière est $y_p : t \mapsto \dfrac{1}{P(1)} e^t - \dfrac{1}{P(-1)} e^{-t}$ où $P(r) = r^2 + 1$, donc $y_p : t \mapsto \dfrac{1}{2} e^t - \dfrac{1}{2} e^{-t} = \mathrm{sh}\ (t)$ (ce que l'on vérifie aisément). Donc l'équation a pour solutions les $y : t \mapsto \lambda\cos(t) + \mu\sin(t) + \mathrm{sh}\ (t),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Les conditions initiales s'écrivent $\lambda = 0$ et $\mu + 1 = 2$, donc $\lambda = 0$ et $\mu = 1$. Donc :

$$S = \{ y : t \mapsto \sin(t) + \mathrm{sh}\ (t) \}.$$

(g) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2, à coefficients constants. Son polynôme caractéristique est $P(r) = r^2 - 3r + 2 = (r-1)(r-2)$, donc l'équation homogène a pour solutions les $y_h : x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{2x},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Le second membre est polynomial de degré 3, donc une solution particulière est $y_p : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$, avec :

$$(6ax + 2b) - 3(3ax^2 + 2bx + c) + 2(ax^3 + bx^2 + cx + d) = 2x^3 - 7x^2 + 2x - 1,$$

donc, par identification : $2a = 2,\ -9a + 2b = -7,\ 2c - 6b + 6a = 2,\ 2d - 3c + 2b = -1$, c'est-à-dire $a = b = c = 1$ et $d = 0$. Donc :

$$S = \left\{ y : x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{2x} + x^3 + x^2 + x \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

(h) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2, à coefficients constants. Son polynôme caractéristique est $P(r) = r^2 - 2r + 2$, de discriminant $\Delta = -4$, donc de racines $r_{1,2} = \dfrac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$. Donc l'équation homogène a pour solutions les $y_h : x \mapsto e^x(\lambda\cos(x) + \mu\sin(x)),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Comme le second membre est le produit d'un polynôme de degré 1 par une exponentielle, une solution particulière est $y_p : x \mapsto (ax+b)e^x$, d'où $y_p' : x \mapsto (ax+a+b)e^x$, d'où $y_p'' : x \mapsto (ax+2a+b)e^x$, avec :

$$(ax + 2a + b)e^x - 2(ax + a + b)e^x + 2(ax + b)e^x = xe^x,$$

c'est-à-dire, par identification : $a - 2a + 2a = 1$ et $2a + b - 2(a+b) + 2b = 0$, c'est-à-dire $a = 1$ et $b = 0$. Donc $y_p : x \mapsto xe^x$ convient.
Les solutions sont donc les $y : x \mapsto e^x(\lambda\cos(x) + \mu\sin(x)) + xe^x,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
La condition initiale s'écrit $\lambda = 1$, donc :

$$S = \{ y : x \mapsto e^x(\cos(x) + \mu\sin(x)) + xe^x \mid \mu \in \mathbb{R} \}.$$

Exercice 7. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
L'équation homogène associée $y'' + y = 0$ a classiquement pour ensemble de solutions :

$$S_h = \{ y_h : t \mapsto \lambda\cos(t) + \mu\sin(t) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}.$$

Une solution particulière de l'équation complète est donnée :

- sur $\mathbb{R}_-$: par $y_{p,1} : t \mapsto -t + 1$,
- sur $\mathbb{R}_+$: par $y_{p,2} : t \mapsto t + 1$.

Notons respectivement S_1 et S_2 les ensembles de solutions sur $\mathbb{R}_-$ et $\mathbb{R}_+$, on a donc :

$$S_1 = \{ y_1 : t \mapsto \lambda_1\cos(t) + \mu_1\sin(t) - t + 1 \mid \lambda_1, \mu_1 \in \mathbb{R} \},$$

et

$$S_2 = \{ y_2 : t \mapsto \lambda_2\cos(t) + \mu_2\sin(t) + t + 1 \mid \lambda_2, \mu_2 \in \mathbb{R} \}.$$

Notons y une réunion de y_1 et y_2. On détermine alors lesquelles de ces solutions sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$:

- $\dfrac{y(t) - y(0)}{t - 0} \underset{t \to 0_-}{\longrightarrow} \mu_1 - 1$ et $\dfrac{y(t) - y(0)}{t - 0} \underset{t \to 0_+}{\longrightarrow} \mu_2 + 1$, donc y est dérivable en 0 si et seulement si $\mu_1 - 1 = \mu_2 + 1$. On note alors $\mu = \mu_1 - 1 = \mu_2 + 1$.
- Dans ce cas : $\dfrac{y'(t) - y'(0)}{t - 0} \underset{t \to 0_-}{\longrightarrow} \lambda_1$ et $\dfrac{y'(t) - y'(0)}{t - 0} \underset{t \to 0_+}{\longrightarrow} \lambda_2$, donc y est deux fois dérivable en 0 si et seulement si $\lambda_1 = \lambda_2$. On note alors $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$.

Finalement :

$$S = \left\{ \begin{array}{rcl} y : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \lambda\cos(t) + (\mu+1)\sin(t) - t + 1 & \text{si } t \leq 0 \\ \lambda\cos(t) + (\mu-1)\sin(t) + t + 1 & \text{si } t \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 8. On procède par analyse-synthèse :

- Soit f une solution, alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = -f'(-x) = -f(x)$, c'est-à-dire $f'' + f = 0$, donc, usuellement : $f : x \mapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
- Réciproquement, soit f de cette forme. Alors $f'(x) = -\lambda\sin(x) + \mu\cos(x)$, donc f est solution si et seulement si : $\forall x \in \mathbb{R},\ -\lambda\sin(x) + \mu\cos(x) = \lambda\cos(x) - \mu\sin(x)$, c'est-à-dire, par identification, $\lambda = \mu$.

Finalement :

$$S = \{f : x \mapsto \lambda(\cos(x) + \sin(x)) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 9. On pose $t = \ln x$ et $z : t \mapsto y(x)$. Alors : $y(x) = z(\ln x)$, donc $y'(x) = \frac{1}{x}z'(\ln x) = \frac{1}{x}z'(t)$, puis $y''(x) = -\frac{1}{x^2}z'(t) + \frac{1}{x^2}z''(t)$, donc :

$$x^2y'' + 3y + 1 = (x+1)^2 \Leftrightarrow z'' - z' + 3z = x^2 + 2x = e^{2t} + 2e^t.$$

Cette dernière équation est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et de second membre exponentiel. Le polynôme caractéristique associé est $P(r) = r^2 - r + 3$, de discriminant $\Delta = -11$, donc de racines $r_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{11}}{2}$.

L'équation homogène a alors pour solutions les $z_h : t \mapsto e^{\frac{t}{2}}\left(\lambda\cos\left(\frac{\sqrt{11}}{2}t\right) + \mu\sin\left(\frac{\sqrt{11}}{2}t\right)\right),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, et une solution particulière de l'équation complète est $z_p : t \mapsto \frac{1}{P(2)}e^{2t} + \frac{2}{P(1)}e^t = \frac{1}{5}e^{2t} + \frac{2}{3}e^t$. Les solutions sont donc les :

$$z : t \mapsto e^{\frac{t}{2}}\left(\lambda\cos\left(\frac{\sqrt{11}}{2}t\right) + \mu\sin\left(\frac{\sqrt{11}}{2}t\right)\right) + \frac{1}{5}e^{2t} + \frac{2}{3}e^t,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

et donc :

$$S = \left\{ y : x \mapsto \sqrt{x}\left(\lambda\cos\left(\frac{\sqrt{11}}{2}\ln(x)\right) + \mu\sin\left(\frac{\sqrt{11}}{2}\ln(x)\right)\right) + \frac{x^2}{5} + \frac{2x}{3} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 11.

(a) Comme y est dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto e^{at}y(-t)$ l'est aussi. Donc y' est dérivable, donc y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Ainsi, par récurrence sur l'assertion « y est n fois dérivables sur $\mathbb{R}$ », y est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

(b) On dérive l'identité donnée :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y''(t) = ae^{at}y(-t) - e^{at}y'(-t) = ay'(t) - e^{at}e^{-at}y(t).$$

Donc y est solution de l'équation $y'' - ay' + y = 0$.

(c) Cette dernière équation (E') est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, homogène.
Son polynôme caractéristique $P(r) = r^2 - ar + 1$ a pour discriminant $\Delta = a^2 - 4$, donc :

- si $|a| > 2$: le polynôme caractéristique a pour racines $r_{1,2} = \dfrac{a \pm \sqrt{a^2-4}}{2}$, donc, en notant $\omega = \dfrac{\sqrt{a^2-4}}{2}$ l'équation (E') a pour ensemble de solutions :
$$S' = \left\{ y : t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} = e^{\frac{at}{2}} \left(\lambda e^{\omega t} + \mu e^{-\omega t} \right) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$
Soit $y \in S'$, on a alors : $y \in S \Leftrightarrow y'(t) = e^{at} y(-t) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{a}{2}\lambda + \omega\lambda & = & \mu \\ \frac{a}{2}\mu - \omega\mu & = & \lambda \end{array} \right. \Leftrightarrow \mu = r_1 \lambda$, donc :
$$S = \left\{ y : t \mapsto \lambda e^{\frac{at}{2}} \left(e^{\omega t} + r_1 e^{-\omega t} \right) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

- si $|a| = 2$: le polynôme caractéristique a pour racine double $r_0 = \dfrac{a}{2}$, donc l'équation (E') a pour ensemble de solutions :
$$S' = \left\{ y : t \mapsto (\lambda t + \mu) e^{\frac{at}{2}} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$
Soit $y \in S'$, on a alors : $y \in S \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{a}{2}\lambda & = & -\lambda \\ \lambda + \frac{a}{2}\mu & = & \mu \end{array} \right. \Leftrightarrow \lambda = 0$ si $a = 2,\ \lambda = 2\mu$ si $a = -2$, donc, si $a = 2$:
$$S = \left\{ y : t \mapsto \mu e^t \mid \mu \in \mathbb{R} \right\},$$
et si $a = -2$:
$$S = \left\{ y : t \mapsto \mu(2t+1) t e^{-t} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

- si $|a| < 2$: le polynôme caractéristique a pour racines $r_{1,2} = \dfrac{a \pm i\sqrt{4-a^2}}{2}$, donc, en notant $\omega = \dfrac{\sqrt{4-a^2}}{2}$, l'équation (E') a pour ensemble de solutions :
$$S' = \left\{ y : t \mapsto e^{\frac{at}{2}} \left(\lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t) \right) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$
Soit $y \in S'$, on a alors : $y \in S \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{a}{2}\lambda + \omega\mu & = & \lambda \\ \frac{a}{2}\mu - \omega\lambda & = & -\mu \end{array} \right. \Leftrightarrow \mu = \sqrt{\dfrac{2-a}{2+a}}\lambda$, donc :
$$S = \left\{ y : t \mapsto \lambda e^{\frac{at}{2}} \left(\cos(\omega t) + \sqrt{\frac{2-a}{2+a}} \sin(\omega t) \right) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 12.

(a) Notons $u = x + y$ et $v = x - y$. On a :
$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & y + t^2 \\ y' & = & x - t^2 \end{array} \right. & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} u' & = & u \\ v' & = & -v + 2t^2 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{rcl} u & : & t \mapsto \lambda e^t \\ v & : & t \mapsto \mu e^{-t} + 2t^2 - 4t + 4 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{rcl} x & : & t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{-t} + t^2 - 2t + 2 \\ y & : & t \mapsto \lambda e^t - \mu e^{-t} - t^2 + 2t - 2 \end{array} \right. . \end{aligned}$$

(b) Soit (x, y) une solution du système. Alors :

$$x'' = -7x' + y' = -7x' - 2x - 5y = -7x' - 2x - 5(x' + 7x - 1) = -12x' - 37x + 5,$$

c'est-à-dire que x est solution de l'équation :

$$x'' + 12x' + 37x = 5.$$

Cette équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants a pour polynôme caractéristique $P(r) = r^2 + 12r + 37$, de discriminant $\Delta = -4$, donc de racines $r_{1,2} = \dfrac{-12 \pm 2i}{2} = -6 \pm i$.
De plus, une solution particulière évidente de l'équation est $x = \dfrac{5}{37}$, donc :

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ x : t \mapsto e^{-6t}\left(\lambda \cos(t) + \mu \sin(t)\right) + \frac{5}{37}.$$

De même, y est solution de l'équation $y'' + 12y' + 37y = -2$, donc :

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ y : t \mapsto e^{-6t}\left(\alpha \cos(t) + \beta \sin(t)\right) - \frac{2}{37}.$$

Par identification : $\alpha = \lambda + \mu$ et $\beta = -\lambda + \mu$, d'où :

$$(x, y) \in S \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x & : & t \mapsto e^{-6t}\left(\lambda \cos(t) + \mu \sin(t)\right) + \dfrac{5}{37} \\ y & : & t \mapsto e^{-6t}\left((\lambda + \mu) \cos(t) + (-\lambda + \mu) \sin(t)\right) - \dfrac{2}{37} \end{cases}.$$

(c) On pose $u = x + iy$. Alors x et y sont solutions du système si et seulement si u est solution de l'équation :

$$u' - (2t + i)u = te^{it}.$$

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1, d'inconnue $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. L'équation homogène associée a pour solutions les $u_h : t \mapsto \lambda e^{\int (2t+i)dt} = \lambda e^{t^2+it},\ \lambda \in \mathbb{R}$.
Une solution particulière est $u_p : t \mapsto \lambda(t)e^{t^2+it}$, avec $\lambda'(t)e^{t^2+it} = te^{it}$, c'est-à-dire $\lambda'(t) = te^{-t^2}$, donc $\lambda : t \mapsto -\dfrac{1}{2}e^{-t^2}$ convient, donc $u_p : t \mapsto -\dfrac{1}{2}e^{it}$ convient.
Donc les solutions sont les $u : t \mapsto \lambda e^{t^2+it} - \dfrac{1}{2}e^{it},\ \lambda \in \mathbb{R}$, donc :

$$S = \left\{ x : t \mapsto \lambda e^{t^2} \cos(t) - \frac{1}{2}\cos(t),\ y : t \mapsto \lambda e^{t^2} \sin(t) - \frac{1}{2}\sin(t) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 14. On dérive l'équation, ce qui donne : $ty''' + y'' - 2y'' - ty' - y = 0$, soit :

$$ty''' - y'' - ty' - y = 0.$$

On redérive : $ty'''' + y''' - y''' - ty'' - y' - y' = 0$, soit :

$$ty'''' - ty'' - 2y' = 0.$$

Or $2y' = ty'' - ty$, donc : $ty'''' - 2ty'' + ty = 0$, soit (comme $t \in \mathbb{R}_+^*$) :

$$y'''' - 2y'' + y = 0.$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 4 à coefficients constants, homogène, de polynôme caractéristique $P(r) = r^4 - 2r^2 + 1 = (r^2-1)^2 = (r-1)^2(r+1)^2$. Donc :

$$y : t \mapsto (\lambda t + \mu)e^t + (\nu t + \xi)e^{-t}, \quad \lambda, \mu, \nu, \xi \in \mathbb{R}.$$

$$ty'' - 2y' - ty = 0$$

Réciproquement, soit y de cette forme, alors :

$$y'(t) = (\lambda t + \lambda + \mu)e^t + (-\nu t + \nu - \xi)e^{-t},$$

puis :

$$y''(t) = (\lambda t + 2\lambda + \mu)e^t + (\nu t - 2\nu + \xi)e^{-t},$$

donc y est solution si et seulement si :

$$(\lambda - \lambda)t^2e^t + (2\lambda + \mu - 2\lambda - \mu)te^t + (\nu - \nu)t^2e^{-t} + (-2\nu + \xi + 2\nu - \xi)te^{-t} - 2(\lambda + \mu)e^t - 2(\nu - \xi)e^{-t} = 0,$$

c'est-à-dire, par identification : $\lambda + \mu = \nu - \xi = 0$. Finalement :

$$S = \left\{ y : t \mapsto \lambda(t-1)e^t + \nu(t+1)e^{-t} \mid \lambda, \nu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 15.

(a) On pose $z = \dfrac{1}{y}$, alors $z' = -\dfrac{y'}{y^2} = -y'z^2$, donc :

$$y' + ay + by^2 = 0 \Leftrightarrow -\frac{z'}{z^2} + \frac{a}{z} + \frac{b}{z^2} = 0 \Leftrightarrow z' - az = b.$$

Cette dernière équation est une équation différentielle linéaire d'ordre 1, que l'on sait donc résoudre.

(b) Soit y_0 une solution particulière, et posons $w = y - y_0$. On a $y_0' + ay_0 + by_0^2 = c$ donc, par soustraction :

$$(y \text{ est solution}) \Leftrightarrow w' + aw + b(y^2 - y_0^2) = 0.$$

Or : $y^2 - y_0^2 = (y - y_0)(y + y_0) = w(w + 2y_0) = 2y_0w + w^2$, donc :

$$(y \text{ est solution}) \Leftrightarrow w' + (a + 2by_0)w + bw^2 = 0,$$

ce qui nous ramène au premier cas.

(c) Soit $y_0 : x \mapsto \dfrac{1}{x}$. Alors : $x^2(y_0' + y_0^2) = x^2 \times \left(-\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^2}\right) = 0 = xy_0 - 1$, donc y_0 est solution.

On pose $w = y - y_0$, alors, d'après (b) (avec $a = -\dfrac{1}{x}$ et $b = 1$) :

$$x^2(y' + y^2) = xy - 1 \Leftrightarrow w' + \frac{w}{x} + w^2 = 0.$$

On pose ensuite $z = \dfrac{1}{w}$ (lorsque $w \neq 0$, c'est-à-dire $y \neq y_0$), alors d'après (a) (avec $a = \dfrac{1}{x}$ et $b = 1$) :

$$x^2(y' + y^2) = xy - 1 \Leftrightarrow z' - \frac{z}{x} = 1.$$

Cette dernière équation est une équation différentielle d'ordre 1. L'équation homogène associée a pour solutions les $z_h : x \mapsto \lambda e^{\int \frac{dx}{x}} = \lambda x, \lambda \in \mathbb{R}$, et une solution particulière de l'équation complète est $z_p : x \mapsto \lambda(x)x$, avec $\lambda'(x)x = 1$, donc $\lambda'(x) = \dfrac{1}{x}$, donc $\lambda(x) = \ln(x)$, donc $z_p : x \mapsto x\ln(x)$ convient.
Donc les solutions sont les $z : x \mapsto \lambda x + x\ln(x),\ \lambda \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire les $w : x \mapsto \dfrac{1}{\lambda x + x\ln(x)},\ \lambda \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire :

$$S = \left\{ y : x \mapsto \frac{1}{x},\ y : x \mapsto \frac{1}{\lambda x + x\ln(x)} + \frac{1}{x} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$