Devoir à la maison n° 5
CORRIGÉ

Exercice 1.

1. Soient f et g deux fonctions continues sur un segment $[a,b]$.
   (a) On développe :
$$P(\lambda)=\lambda^2\int_a^b g^2+2\lambda\int_a^b fg+\int_a^b f^2,$$
   d'où $\Delta=4\left(\int_a^b fg\right)^2-4\int_a^b f^2\int_a^b g^2$.
   (b) Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Comme la fonction $(f+\lambda g)^2$ est positive, son intégrale l'est aussi (c'est la propriété de *positivité* de l'intégrale). Le polynôme $P(\lambda)$ est donc de signe constant sur $\mathbb{R}$, donc $\Delta\leq 0$.
   (c) D'après les questions précédentes, on a $4\left(\int_a^b fg\right)^2-4\int_a^b f^2\int_a^b g^2\leq 0$, d'où l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Il y a égalité si et seulement si $\Delta=0$, c'est-à-dire s'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $P(\lambda)=0$, c'est-à-dire tel que $f+\lambda g=0$. Il y a donc égalité si et seulement si f et g sont proportionnelles.
2. (a) On a :
$$\int_0^1 h(x)^2dx=\int_0^1 1\times h(x)^2dx=\left[xh(x)^2\right]_0^1-\int_0^1 x\times 2h(x)h'(x)dx=-\int_0^1 x\times 2h(x)h'(x)dx,$$
   donc $\int_0^1 xh(x)h'(x)dx=-\frac{1}{2}\int_0^1 h(x)^2dx=-\frac{1}{2}$.
   (b) Avec $f=h'$ et $g:x\mapsto xh(x)$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit :
$$\left(\int_0^1 xh(x)h'(x)dx\right)^2\leq\left(\int_0^1 h'(x)^2dx\right)\left(\int_0^1 x^2h(x)^2dx\right),$$
   d'où l'inégalité voulue.

Exercice 2.

1. On a :
   - $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{2}$,
   - $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx = [-\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 - (-1) = 1$,
   - $I_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(2x)}{2} dx = \frac{\pi}{4} - \left[\frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme la fonction $\sin$ est positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin^n$ l'est aussi, donc, par positivité de l'intégrale, I_n l'est aussi.
   De plus, comme $0 \leq \sin \leq 1$, $\sin^{n+1} \leq \sin^n$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc, par croissance de l'intégrale, $I_{n+1} \leq I_n$.
   La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc positive, c'est-à-dire minorée par 0, et décroissante, donc est convergente.
3. Par intégration par parties :
   $$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \sin^{n+1}(x) dx \\ &= \left[-\cos(x)\sin^{n+1}(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \times (n+1)\cos(x)\sin^n(x) dx \\ &= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\sin^n(x) dx, \end{aligned}$$
   donc $I_{n+2} = (n+1)\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2(x))\sin^n(x) dx = (n+1)(I_n - I_{n+2})$. On a donc $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme la suite (I_n) est décroissante, on a :
   $$I_n \geq I_{n+1} \geq I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n,$$
   donc $1 \geq \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \geq \dfrac{n+1}{n+2}$. Donc, par encadrement : $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.