Devoir à la maison n° 5

Exercice 1.

1. Soient f et g deux fonctions continues sur un segment $[a, b]$.
   (a) Déterminer le discriminant Δ du polynôme $P(\lambda) = \displaystyle\int_a^b (f + \lambda g)^2$.
   (b) Justifier que : $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ P(\lambda) \geq 0$. Que peut-on en conclure sur le signe de Δ ?
   (c) En déduire l'inégalité suivante, dite *de Cauchy-Schwarz* :
   $$\left(\int_a^b fg\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right).$$
   À quelle condition y a-t-il égalité ?
2. Application : Soit $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $h(0) = h(1) = 0$ et telle que $\displaystyle\int_0^1 h(x)^2 dx = 1$.
   (a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_0^1 xh(x)h'(x)dx = -\frac{1}{2}$.
   (b) À l'aide de la question 1., montrer que $\displaystyle\left(\int_0^1 h'(x)^2 dx\right)\left(\int_0^1 x^2 h(x)^2 dx\right) \geq \frac{1}{4}$.

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^n \, dx$.

1. Calculer I_0, I_1 et I_2.
2. Justifier que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et décroissante. En déduire qu'elle converge.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par intégration par parties, montrer que : $I_{n+2} = (n + 1)(I_n - I_{n+2})$.
   En déduire I_{n+2} en fonction de I_n.
4. Déduire des questions précédentes la limite de la suite $\displaystyle\left(\frac{I_{n+1}}{I_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.