Corrigé du TD 17 : $\boxed{\text{Espaces euclidiens}}$

Si rien n'est précisé $(E, <,>)$ est un espace euclidien (norme associée $\|.\|$) de dimension $n \geq 1$ dont $F, G, ..$ sont des sous-espaces vectoriels.

Exercice ($\star$) 1 *(Auto-adjoint)*
Montrer que la projection p sur F et parallèlement à G est un endomorphisme auto-adjoint de E si et seulement si $G = F^{\perp}$.

Solution : Le sens indirect se trouve dans votre cours.
Si p est auto-adjoint alors $Ker(p - id_E) = Im(p)$ est l'orthogonal de $Ker(p)$ puisque le spectre de p est inclus dans $\{0, 1\}$■

Exercice ($\star$) 2 *(Isométrie vectorielle)*
Etablir que les isométries vectorielles diagonalisables sont les symétries orthogonales en procédant par double implication.

Solution : Les symétries orthogonales sont des isométries vectorielles (cf cours) et, en tant que symétries, sont dz.
Inversement si f est une isométrie vectorielle diagonalisable. On a vu en cours que les seules valeurs propres de f étaient ± 1. Comme f est dz, il est représenté par une matrice diagonale avec des 1 et -1 sur sa diagonale. Cette matrice étant une matrice de symétrie, il en va de même pour f. Dans le cours on a montré que les seules symétries qui soient des isométries vectorielles étaient orthogonales. La boucle est bouclée■

Exercice ($\star$) 3 *(Auto-adjoint)*
Soit $f \in S(E)$. Prouver que $(Ker(f))^{\perp} = Im(f)$

Solution : Pour des raisons de dimension, il nous suffit de vérifier qu'un vecteur du noyau et un vecteur de l'image sont orthogonaux.
Soient $x \in Ker(f)$ et $y = f(t) \in Im(f)$ alors (caractère auto-adjoint) :
$< x, y >=< x, f(t) >=< f(x), t >=< 0_E, t >= 0$■

Exercice ($\star$) 4 *(Matrice orthogonale et isométrie vectorielle)*
Soit $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ *et f son endomorphisme canoniquement associé.*
a) A est-elle orthogonale? (Examiner les vecteurs colonnes).
b) Préciser la nature de f ainsi que ses caractéristiques.

Solution :a) Les colonnes forment bien une b.on pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$■
b) A étant une matrice symétrique et f étant canoniquement associé à cette matrice, f est àla fois (a)) une isométrie vectorielle et un endomorphisme auto-adjoint. C'est donc une symétrie orthogonale ($A =^t A$ et ${}^tAA = I_3$).
Nous cherchons donc à déterminer $Ker(f - id_{\mathbb{R}^3})$. Un simple calcul montre qu'il s'agit du plan P : $-x + y + z = 0$. Il en résulte que f est la réflexion suivant le plan P■

Exercice (⋆⋆) 1 *(Gauss et Cérès)*
Le premier janvier 1801 l'astronome sicilien Piazzi découvre dans son observatoire de Palerme (on pense au Guépard *de Lampedusa ou de Visconti) une nouvelle planète (en fait le premier astéroïde dont le diamètre est environ un cinquième de celui de la lune), Cérès*[a]*; mais il la perd vite de vue et les savants essaient en vain de la localiser. En décembre 1801 on retrouve Cérès grâce à des calculs de Gauss.*
Pour déterminer la position de Cérès, Gauss effectue m observations et ramène le problème à la résolution d'un système linéaire à $n \leq m$ inconnues et à m équations qui ne possède pas de solution. Au lieu d'abdiquer (prenez en de la graine), il se décide à chercher une solution approchée de ce système (idée légitimée par l'incertitude des observations).
Le système de Gauss (sous forme matricielle) peut s'écrire $AX = B$ (1), où $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $B \in M_{m,1}(\mathbb{R})$ et $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$.
L'équation linéaire canoniquement associée à cette égalité matricielle s'écrira $f(x) = b$ (2) .
On émettra l'hypothèse que f est injective, cela résulte des observations de Gauss et on considèrera la structure euclidienne standard de $\mathbb{R}^m$.
Puisque (2) n'a pas de solution, on va chercher les $x \in \mathbb{R}^n$ tels que $\|f(x) - b\|$ soit minimal.
a) Montrer que ce problème de minimisation possède une unique solution.
b) Résoudre par ce biais : $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 6 \\ x - y = 0 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$
c) En reprenant les notations générales, comparer votre solution à celle de ${}^tAAX ={}^t AB$.
Explique ce phénomène[b]*.*

[a]Déesse des moissons chez les romains.
[b]C'est en fait l'approche de Gauss.

Solution : a) Posons $F = Im(f)$ et $r = d(b, F) = \|b - p_F(b)\|$. On sait que r est le minimum des $\|b - f(u)\|$ lorsque u décrit $\mathbb{R}^n$ et que ce minimum n'est obtenu que lorsque $f(u) = p_F(b)$. Puisque $p_F(b)$ appartient à F il existe bien un $u \in R^n$ tel que cette égalité ait lieu et l'injectivité de f assure aussi l'unicité d'un tel u. Il en résulte que la minimisation de $\|f(x) - b\|$ possède une solution unique : l'antécédent par f du projeté orthogonal de b sur l'image de f■
b) Ici $m = 4$, $n = 2$ et $b = (3, 6, 0, 3)$; f est définie par $f(x, y) = (x + y, 2x - y, x - y, 2x + y)$, où $(x, y) \in R^2$. Ainsi $F = Im(f) = Vect(u = (1, 2, 1, 2); v = (1, -1, -1, 1))$. on notera sans déplaisir que u et v sont orthogonaux. On voit aussi que f est injective puisque son noyau se réduit au vecteur nul de $\mathbb{R}^2$.
Dès lors on dispose en $t = \dfrac{1}{\sqrt{10}}u$ et $w = \dfrac{1}{2}v$ d'une base orthonormée de F dans laquelle $a = p_F(b)$ se décompose comme suit (cf cours) : $a =< b, t > t+ < b, w > w = \dfrac{21}{10}u = f(21/10, 0)$ donc la solution à ce problème est $\boxed{(21/10, 0)}$□
Enfin $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et le système matriciel s'écrit (simples calculs) $\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Ce qui conduit à la même solution□
De façon plus générale on cherche à trouver le seul X tel que pour tout Y (de même nature) ${}^t(AY)(B - AX) = 0$. On voit que cette condition sera satisfaite si ${}^tAAX ={}^t AB$. Il reste à savoir si ce système carré de taille m possède une solution (unique). Remarquons alors que l'égalité ${}^tAAT = 0_{m,1} \Longrightarrow^t T^tAAT = 0$ soit $\|AT\| = 0$ donc, par séparation, $AT = 0_{n,1}$ d'où (injectivité de f) $T = 0_{m,1}$. Notre système est donc de Cramer puisque sa matrice est inversible comme on vient de le prouver■

Exercice (⋆⋆) 2 *(D'après Centrale et Mines)*
Ici $E = \mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne usuelle (produit scalaire noté $\bullet$); on rappelle, à toutes fins utiles, que, pour $(x, y)\, de E^2$: $x \bullet y = {}^tXY$, où X, Y désignent les matrices colonnes des composantes de x et y dans la base canonique.
Soit $f \in L(E)$ dont la matrice dans la base canonique est notée A. Enfin, on note f^* l'endomorphisme canoniquement associé à ${}^tA$.
1) Etablir que : $\forall (x, y) \in E^2,\ f(x) \bullet y = x \bullet f^*(y)$.
2) En déduire que F, sous-espace vectoriel de E, est stable par f si et seulement si $F^\perp$ est stable par f^*.
3) Applications :
a) Prouver alors, que si n est impair, il existe au moins une droite vectorielle et un hyperplan de E, stables par f.
b) Ici $n = 3$.
i) Préciser l'orthogonal du plan P d'équation : $x - y + z = 0$.
ii) En déduire que P est stable par f canoniquement associé à

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 \\ 5 & -6 & 10 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution :2) Comme avec le double orthogonal (et le double adjoint) on retombe sur l'objet d'origine, une implication va suffire. Supposons donc F stable par f et prenons $y \in F^\perp$ alors, pour tout x de F, nous avons $x \bullet f^*(y) = f(x) \bullet y = 0$ puisque $f(x) \in F$. L'implication désirée en découle■
3)a) On rappelle qu'un polynôme à coefficients réels et de degré impair possède une racine réelle. Ainsi f possède-t-il au moins une valeur propre donc un vecteur propre et la droite vectorielle qu'engendre ce dernier est stable par f (Cours !). Dès lors un tel résultat s'applique aussi à f^* et nous fournit une droite vectorielle D stable par f^*. 2) nous dit alors que l'orthogonal de D (qui est un hyperplan de E) est stable par f. Il y a bien, pour f, une droite vectorielle et un hyperplan stables■
b)i) Il s'agit de la droite dirigée par $(1, -1, 1)$□
ii) Un simple calcul matriciel prouve que $f^*(1, -1, 1) = (-1, 1, -1) = -(1, -1, 1)$ donc $D = Vect(1, -1, 1)$ est stable par f^* et, toujours avec 2), l'orthogonal de D, à savoir P, est stable par f■

Exercice (⋆⋆⋆) 1 *(Décomposition polaire)*
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.
1) Etablir que : ${}^tAA \in S_n^+(\mathbb{R})$.
2) On suppose ici A inversible, prouver que ${}^tAA \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$.
3) A l'aide du théorème spectral matriciel montrer qu'il existe une matrice $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $S^2 ={}^t MM$.
4) Vérifier alors que MS^{-1} est une matrice orthogonale.
5) a)En déduire que M peut s'écrire comme le produit d'une matrice orthogonale et d'une matrice symétrique définie positive.
b) (Difficile) Etablir que cette décomposition est unique.
6) Prouver alors que si $B \in M_n(\mathbb{R})$ vérifie $\|BX\| \leq \|X\|$ pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ ($\|.\|$ norme euclidienne standard sur $M_{n,1}(\mathbb{R})$) et que son spectre complexe est inclus dans $\mathbb{U}$ alors $B \in O(n)$ (Théorème de Djokovic(1971)).

Solution : 1) et 2) sont traitées dans votre cours.
3) Ainsi ${}^tMM$ est une matrice symétrique définie positive donc, par le théorème spectral, il existe des réels strictement positifs $a_1, ...a_n$ et $O \in$ ‰(n) tels que ${}^tMM = Odiag(a_1, ..., a_n){}^tO$. On pose alors $S = Odiag(\sqrt{a_1}, ..., \sqrt{a_n}){}^tO$. En transposant on voit que S est symétrique (réelle) et les valeurs propres de S sont $\sqrt{a_1}, ..., \sqrt{a_n}$; il s'agit bien de réels strictement positifs. $\boxed{S \in S_n^{++}(\mathbb{R})}$.
Enfin $S^2 = Odiag^2(\sqrt{a_1}, ..., \sqrt{a_n}){}^tO = Odiag(a_1, ..., a_n){}^tO ={}^t MM$■
4) On s'intéresse au produit matriciel ${}^t(MS^{-1})MS^{-1} = (S^{-1}){}^tMMS^{-1}$ (S^{-1} étant symétrique) puis, avec 3),
${}^t(MS^{-1})MS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_n$. Autrement dit $MS^{-1} \in O(n)$■
5)a) Clairement $M = (MS^{-1})S$, ce qui répond à la question ■
b) Donnons nous deux décompositions de M à savoir $M = O_1S_1 = O_2S_2$ avec des notations évidentes.
On en déduit que $O_2^{-1}O_1 = S_2S_1^{-1}$ et on pose $U = O_2^{-1}O_1 \in O(n)$ donc aussi $U = S_2S_1^{-1}$

Comme $S_1 \in\in S_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe $V \in\in S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $V^2 = S_1$; Il en résulte que $U = S_2V^{-2}$ et que U est semblable à la matrice symétrique réelle $V^{-1}S_2V^{-1}$. Comme il existe $W \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $W^2 = S_2$, il vient que U est semblable à $V^{-1}WWV^{-1} =^t (WV^{-1})WV^{-1}$. Cette dernière matrice est symétrique positive. Il en résulte U est une matrice orthogonale diagonalisable à valeurs propres positives, U est donc semblable à I_n donc égale à cette matrice. De là on déduit que $O_1 = O_2$ ainsi que $S_1 = S_2$■
6) 0 n'est pas valeur propre de B (puisque toute vp de B est de module 1), on peut donc écrire $B = 0S$, où $O \in O(n)$ et $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$(Suite en classe)

Exercice ($\star$) **5** *(Application du théorème spectral à un problème d'extremum)*

On considère $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1) A est-elle diagonalisable ?

2) Déterminer le rang de $A - 6I_3$. *En déduire une valeur propre de A et expliciter une colonne propre de A dont la premiére composante est 1.*

3) On pose $V = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, *préciser AV; qu'en déduire?*

4) Finir la réduction de A avec un minimum de calculs et justifier l'existence de $\Omega \in O(3)$ *telle que* :$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = {}^t\Omega A \Omega$.

Donner les deux premières colonnes d'une telle matrice. Comment obtenir facilement la dernière?

On pose $U = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$. *Enfin, pour* $(x,y,z) \in U$, *on pose* $f(x,y,z) = \dfrac{{}^tXAX}{{}^tXX}$ *où* $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

5) En posant $X = \Omega Y$ *(l'expression de* Ω *n'est pas utile), où* Y *est un élément de* $M_{3,1}(\mathbb{R})$ *non nul, établir que* $3 \leq f \leq 9$. *Cet encadrement est-il optimal?*

Les deux exercices qui suivent traitent du même thème avec une teinte propre aux concours dont ils sont tirés.

Exercice ($\star$) 6 *(D'après CCINP)*
On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet une racine carrée s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$. Dans ce cas, on dit que B est une racine carrée de A.

1. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A admet une racine carrée, alors $\det(A) \geq 0$.*
2. *Etudier la réciproque de la propriété établie dans la question précédente dans le cas où $n = 2$. On pourra considérer la matrice :*
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$
et écrire $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.
3. *Montrer qu'une matrice peut posséder une infinité de racines carrées.*

Dans tout le reste de l'exercice, on considère une matrice symétrique $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les valeurs propres sont positives.

4. *Justifier que la matrice S est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

Dans la suite de l'exercice, on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de S comptées avec leur multiplicité. On fixe une matrice orthogonale $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = PDP^{-1}$ où :
$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$
On considère également la matrice $R = P\Delta P^{-1}$ avec :
$$\Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

5. *Vérifier que R est une matrice symétrique et une racine carrée de S.*
6. *Déterminer explicitement une racine carrée symétrique de $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ en orthodiagonalisant cette matrice.*
7. *On revient au contexte général en considérant B une racine carrée de A symétrique et de spectre inclus dans $\mathbb{R}_+$.*
Prouver que, pour $\lambda \in Spec(A)$, $Ker(B - \sqrt{\lambda} I_n) = Ker(A - \lambda I_n)$. En déduire que $B = R$.

Exercice ($\star\star$) 3 *(Racine carrée d'un élément de $S_n^+(\mathbb{R})$ d'après Centrale 2024)*
Dans toute cette partie, étant donnée une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$, on appelle racine carrée de M toute matrice $B \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = M$. 1) Rappeler sans démonstration la description des matrices de $O(2)$.
On décrira leurs coefficients en fonction d'un paramètre $\theta \in \mathbb{R}$.
2) Déterminer les racines carrées de I_2 appartenant à $O(2)$ appartenant à $O(2)$. Que peut-on conclure quant au nombre de racines carrées de I_2 ?
3) Rappeler sans démonstration la condition nécessaire et suffisante portant sur le spectre d'une matrice symétrique pour qu'elle soit positive.
4) Soit $M \in S_n^+(\mathbb{R})$. Déterminer une matrice $B \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = M$.
5) Montrer que B est la seule racine carrée de M appartenant à $S_n^+(\mathbb{R})$.
6) Etudier la continuité de l'application r qui à $M \in S_n^+(\mathbb{R})$ associe sa seule racine carrée appartenant à $S_n^+(\mathbb{R})$.
(Ne figurait pas dans le sujet d'origine).

Exercice ($\star\star\star$) 2 *(Mines)*
Soient $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ et $B \in S_n(\mathbb{R})$.
1) Montrer l'existence d'une matrice symétrique C telle que $A = C^2$ (Encore!).
2) Etablir que les valeurs propres de AB sont toutes réelles.

Solution :

Exercice ($\star\star\star\star$) 1 *(ENS)*
1) Soient $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$.
CNS pour que A soit positive, définie positive ?
2) Soit $(a,b,c) \in [-1,1]^3$ tel que $1 + 2abc \geq a^2 + b^2 + c^2$.
Prouver que $1 + 2(abc)^n \geq a^{2n} + b^{2n} + c^{2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution :

Exercice ($\star$) 7 *(D'après CCINP)*
Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.
Partie I - Produit Scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$
I.1 - Généralités
Pour tout couple $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on note : $(P \mid Q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$.
1) Justifier que l'intégrale définissant $(P \mid Q)$ est convergente.
2) Montrer que l'application $(\cdot \mid \cdot) : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire.
La norme associée à ce produit scalaire se note $\|.\|$.
I.2 - Calcul d'un produit scalaire
3) Soit $k \in [\![1,n]\!]$. A l'aide d'une intégration par parties, établir que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}dt = k\int_0^{+\infty} t^{k-1}e^{-t}dt$.
4) Conclure que $(X^k \mid 1) = k!$ pour tout entier $k \in [\![0,n]\!]$.
Partie II - Construction d'une base orthogonale
On considère l'application α définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \alpha(P) = XP'' + (1-X)P'$.
II.1 - Propriétés de l'application α
5) Montrer que α est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
6) On fixe un couple $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$.
a) Montrer que $(\alpha(P) \mid Q) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}dt$.
b) En déduire que $(\alpha(P) \mid Q) = (P \mid \alpha(Q))$.
c) Etablir que α est diagonalisable.
7) Ecrire la matrice de α dans la base $(1, X, \ldots, X^n)$ et vérifier que $Sp(\alpha) = \{-k \mid k \in [\![0,n]\!]\}$.
II.2 - Vecteurs propres de l'application α
8) On fixe un entier $k \in [\![0,n]\!]$. Quelle est la dimension de $\ker(\alpha + k\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})$?
9) En déduire qu'il existe un unique polynôme $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1, vérifiant $\alpha(P_k) = -kP_k$.
10) Justifier que P_k est de degré k. Déterminer P_0, P_1 et vérifier que $P_2 = X^2 - 4X + 2$.
11) Etablir que $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.
On pose, pour $k \in [\![0,n]\!]$, $Q_k = \dfrac{1}{\|P_k\|}P_k$ et dans la suite P est un élément de $\mathbb{R}[X]$.
On définit $d_n = d(P, \mathbb{R}_n[X]) = \inf\{\|P - Q\|,\ Q \in \mathbb{R}_n[X]\}$ comme la distance de P au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$.
12) En utilisant un résultat de votre cours, justifier qu'il existe un unique polynôme T_n de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que : $d_n = \|P - T_n\|$.
Puis justifier l'égalité : $d_n^2 = \|P\|^2 - \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(c_k(P))^2$, où $c_k(P) = (P|Q_k)$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$.
13) Prouver que la série $\displaystyle\sum_k (c_k(P))^2$ converge et que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(c_k(P))^2 \leq \|P\|^2$.
Pouvez-vous améliorer ce dernier résultat?
14) Proposer une méthode de calcul de $\|P_k\|$, k étant un entier naturel quelconque.

Solution :