ESPACES EUCLIDIENS (Première année) Lycée Bellevue PC*
2025/2026

Si rien n'est précisé, E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel non réduit à son vecteur nul.
Les exercices étoilés doivent être approchés après l'assimilation intégrale de ce cours (qui n'est qu'un rappel de première année).

1 Produit Scalaire sur E

Définition 1 *On appelle produit scalaire sur E une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ telle que :*
i) $\forall x \in E, y \to \varphi(x,y) \in E^*$ (linéarité à droite)
ii) $\forall (x,y) \in E \times E, \varphi(y,x) = \varphi(x,y)$ (symétrie)
iii) $\forall x \in E, \varphi(x,x) \geq 0$ (positivité)
iiii) $\varphi(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$ (caractère défini).
On dit alors que (E,φ) est un espace préhilbertien (et euclidien si E est de dimension finie)

Remarque 1 *a) i)+ii) $\Leftrightarrow$ linéarité à droite et à gauche (bilinéarité) +ii) . Un produit scalaire est donc une forme bilinéaire, symétrique, définie positive.*
b) ϕ bilinéaire $\Rightarrow \forall (x,y) \in E \times E, \phi(x, 0_E) = \phi(0_E, y) = 0$.
c) iii)+iiii)$\Longleftrightarrow x \neq 0_E \Rightarrow \phi(x,x) > 0$.
d) Si (E,ϕ) préhilbertien, F sev de E alors $\left(F, \phi_{/F^2}\right)$ (que l'on écrira plus simplement (F,ϕ)) est aussi un espace préhilbertien.
e) La tradition fait qu'un produit scalaire générique se note $(x,y) \to (x \mid y)$ ou $(x,y) \to < x,y >$ plutôt que ϕ.

Voici les exemples fondamentaux de produits scalaires **à connaître**. Les deux premiers donnent naissance à deux structures euclidiennes.

Exemple 1
a) sur $\mathbb{R}^n, x.y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ où $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n)$ est un produit scalaire qui fait de $\mathbb{R}^n$ un espace euclidien (produit scalaire euclidien standard ou canonique). Matriciellement en identifiant x à $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et y à $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ alors $x.y = {}^tXY$.
b) Sur $M_n(\mathbb{R})$, $(A,B) \to Tr({}^tAB)$ est un produit scalaire (cf a)), dit de Schur.
c) Sur $E = L^2_c(I), (f,g) \to \int_I fg$ est un produit scalaire.

Exercice 1 *(CCINP 2019)*
Pour tout couple $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on note :

$$(P \mid Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt.$$

1) Justifier que l'intégrale définissant $(P \mid Q)$ est convergente.
2) Montrer que l'application $(\cdot \mid \cdot) : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Solution 1 *Faite TD 17 (Partie I.1 du dernier exercice)*■

Exercice 2 *(Théorème de Représentation de Riesz)*
On rappelle que $E^* = L(E,\mathbb{R})$ donc si E est de dimension finie, ce qui sera supposé dans cet exercice, $\boxed{\dim(E^*) = \dim(E)\dim(\mathbb{R}) = \dim(E)}$.
On se donne $(\cdot \mid \cdot)$ un produit scalaire sur E.
Prouver que $a \in E \to \phi_a : x \in E \to (a|x)$ est un isomorphisme de E sur E^*.
(Vérifier son injectivité et conclure).
En déduire qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que : $\forall Q \in \mathbb{R}_3[X]$, $Q'(2) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$.

Solution 2 *La démonstration du théorème de Riesz fut faite en classe.*
Pour l'application : on prend $E = \mathbb{R}_3[X]$ que l'on munit du produit scalaire $<.,.>$: $(A,B) \in E^2 \to \int_0^1 A(t)B(t)dt$ (on a donc une structure euclidienne sur E) et $\phi : Q \in E \to Q'(2)$ qui est un élément de E^*.
Dans ce contexte, le théorème de Riesz répond à la question■

Exercice 3 *($\star$)*
Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base d'un espace euclidien E.
Prouver que $\forall M \in M_n(\mathbb{R}), \exists!(f_1, ..., f_n) \in E^n, M = ((e_i \mid f_j))$.(Mines-Ponts PSI)

Solution 3 *C'est la même stratégie que l'on a utilisée dans l'exercice précédent.*
On définit $\Phi : (f_1, ..., f_n) \in E^n \to ((e_i|f_j)) \in M_n(\mathbb{R})$ dont on vérifie la linéarité et l'injectivité. L'égalité des dimensions des espaces de départ et d'arrivée fournit la bijectivité de Φ et la réponse à l'exercice■

2 Norme associée à un produit scalaire

Dans ce paragraphe $(E, <,>)$ est un espace préhilbertien.
La proposition qui suit est fondamentale, on en trouvera deux preuves en annexe.

Proposition 1 ***(Inégalité de Cauchy-Schwarz)***
Pour $(x,y) \in E^2, |<x,y>| \leq \sqrt{<x,x>}\sqrt{<y,y>}$.
Par ailleurs l'inégalité précédente est une égalité ssi (x,y) lié.

Exercice 4 *Montrer que, pour tout n-uplet de réels strictement positifs $(x_1, ..., x_n)$, on dispose de l'inégalité :*
$(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k})(\sum_{k=1}^{n} x_k) \geq n^2$.
Etudier le cas d'égalité.

Solution 4 *On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique.*
On définit $u = (\sqrt{x_1}, ..., \sqrt{x_n})$ et $v = (\frac{1}{\sqrt{x_1}}, ..., \frac{1}{\sqrt{x_n}})$ et on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz à ces deux vecteurs■

Grâce à cette inégalité on peut "normer" tout espace préhilbertien. Plus précisément

Proposition 2 *$\|.\| : x \in E \to \sqrt{<x,x>}$ est une norme sur E, dite associée au produite scalaire $<,>$. Ainsi E, muni de cette norme, est un **espace vectoriel normé**.*

Une telle norme, dite préhilbertienne voire euclidienne, bénéficie de propriétés (géométriques) remarquables dont, en général, les normes sont privées. En voici les principales.

Proposition 3 *Soient x, y dans E,*
a) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$ (identité du parallélogramme).
b) $< x, y >= \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$ (Polarisation).
c) Il y a égalité dans l'inégalité triangulaire : $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ssi (x, y) sont positivement liés (i.e $x = 0_E$ ou il existe $\lambda \geq 0$ tel que $y = \lambda x$)

Exercice 5 *On se donne $x_1, ..., x_n$ des vecteurs de E tels que $\|\sum_{k=1}^{n} x_k\| = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|$.*
Montrer qu'il existe $u \in E \setminus \{0_E\}$ et des réels positifs $\lambda_1, ..., \lambda_n$ pour lesquels : $\forall k \in [|1, n|], x_k = \lambda_k u$.

Solution 5 *On raisonne par récurrence sur n, le résultat étant limpide pour $n = 1$. Supposons l'assertion validée au rang $n-1$ et donnons nous $x_1, ..., x_n$ des vecteurs de E tels que $\|\sum_{k=1}^{n} x_k\| = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|$. Notons que l'on peut supposer sans perte de généralité que $x_n \neq 0_E$.*
On pose $S = \sum_{k=1}^{n-1} x_k$ alors $\|S + x_n\| = \sum_{k=1}^{n-1} \|x_k\| + \|x_n\|$. Si on avait $\sum_{k=1}^{n-1} \|x_n\| > \|S\|$, on contredirait l'inégalité triangulaire appliquée aux vecteurs S et x_n donc nécessairement $\sum_{k=1}^{n-1} \|x_k\| = \|S\|$ (par double inégalité). On peut donc (HR) dire qu'il existe $u \in E$, $u \neq 0_E$ et $t_1, ..., t_{n-1}$ des réels positifs tels que $x_1 = t_1 u, ..., x_{n-1} = t_{n-1} u$.
En revenant à $\|S + x_n\| = \sum_{k=1}^{n-1} \|x_k\| + \|x_n\| = \|S\| + \|x_n\|$ qui est le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire appliquée aux vecteurs S et x_n. Ce qui entraîne qu'il existe un réel positif t tel que $S = (\sum_{i=1}^{n-1} t_i) u = t x_n$.
Donc ou bien $t = 0$ et tous les t_i (positifs) sont nuls et $x_i = \delta_{i,n} x_n$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
Ou bien $t > 0$ et tous les x_i sont positivement colinéaires à u. La récurrence se poursuit bien$\blacksquare$

Exercice 6 *($X \star$)*
On se donne un espace vectoriel normé de dimension finie (E, N) tel que N vérifie l'identité du parallélogramme.
On se propose de démontrer (Von Neumann) que N est associée à un produit scalaire.
Pour cela on pose $\phi(x, y) = \frac{1}{4}(N^2(x+y) - N^2(x-y))$.
1) Etablir que ϕ est symétrique, définie et positive.
2) En supposant que ϕ soit un produit scalaire sur E, quelle en est la norme associée ?
3) ⚠ On fixe $x \in E$. Prouver que $\forall (y, z) \in E^2, \phi(x, y+z) = \phi(x, y) + \phi(y, z)$.
4) En déduire successivement que pour tout $s \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \phi(x, sy) = s\phi(x, y)$, ce pour tout $(x, y) \in E^2$. Prouver que ce résultat s'étend à $s \in \mathbb{R}$.
5) Conclure.

Solution 6 *1) Deux vecteurs opposés ayant même norme, ϕ est symétrique.*
La positivité est claire puisque $N(0_E)=0$.
Soit enfin $x \in E$ tel que $\phi(x,x)=0$ alors $N(x)=0$ donc, par séparation, $x=0_E$ $\blacksquare$
2) N $\blacksquare$
3) Pour alléger on pose $\frac{1}{4}N^2=f$. Puisque N vérifie l'identité du parallélogramme : $f(u+v)+f(u-v)=2(f(u)+f(v))$ (1)
Pour $(u,v,w)\in E^3$, $\phi(u,2v)+\phi(u,2w)=f(u+2v)+f(u+2w)-f(u-2v)-f(u-2w)=2(f(u+v+w)+f(v-w)-f(u-v-w)-f(w-v))=2\phi(u,v+w)$, ce avec (1). Soit $\phi(u,2v)+\phi(u,2w)=2\phi(u,v+w)$ (2).
En particularisant cette relation à $w=0_E$ il vient $\phi(u,2v)=2\phi(u,v)$ donc, dans le cas général, (2) donne bien le résultat attendu$\blacksquare$
4) Soient x et y dans E, $n\in\mathbb{N}$ et (H_n) l'assertion : $\phi(x,ny)=n\phi(x,y)$. Le processus est clairement initialisé puisque $\phi(x,0_E)=0$.
Supposons H_n établie pour un n donné alors avec Q3 et (H_n) : $\phi(x,(n+1)y)=\phi(x,ny+y)=\phi(x,ny)+\phi(x,y)=(n+1)\phi(x,y)$ et la récurrence se poursuit$\square$ En observant que $\phi(u,-v)=-\phi(u,v)$ pour tout $(u,v)\in E^2$, il vient pour $n\in Z_-$: $\phi(x,ny)=\phi(x,-n(-y))=-n\phi(x,-y)$(car $-n\in\mathbb{N}$) et avec l'observation liminaire : $\phi(x,ny)=n\phi(x,y)$.
Bilan 1 : Pour tout $(x,y,n)\in E^2\times\mathbb{Z}$, $\phi(x,ny)=n\phi(x,y)\square$
Considérons cette fois un rationnel $r=\frac{p}{q}$, où $(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}*$ ainsi que $(x,y)\in E^2$.
Par le bilan 1 : $q\phi(x,ry)=\phi(x,py)=p\phi(x,y)$ soit $\phi(x,ry)=r\phi(x,y)$.
Bilan 2 : Pour tout $(x,y,r)\in E^2\times\mathbb{Q}$, $\phi(x,ry)=r\phi(x,y)\square$
Soit $\lambda\in\mathbb{R}$, on peut considérer une suite (r_n) de rationnels convergeant vers λ.
Le bilan 2 nous permet d'écrire (x et y étant fixés dans E) que : $\phi(x,r_ny)=r_n\phi(x,y)$ (3), ce pour tout entier naturel n.
L'application $g:t\in\mathbb{R}\to t\phi(x,y)$ est une fonction linéaire, elle est donc continue en λ.
L'application $h:t\in\mathbb{R}\to\phi(x,ty)=\frac{1}{4}(N^2(x+ty)-N^2(x-ty))$ est aussi continue en ce point (en dimension finie toute norme es continue) par opérations sur des fonctions notoirement continues.
Donc en passant à la limite dans (3) qui s'écrit aussi $h(r_n)=g(r_n)$, nous obtenons $h(\lambda)=g(\lambda)$ soit enfin $\boxed{\phi(x,\lambda y)=\lambda\phi(x,y)}$ $\blacksquare$
5) Les questions 1),3) et 4) précédentes prouvent que ϕ est un produit scalaire de norme associée N (cf 2)). Ainsi en dimension finie une norme est euclidienne (i.e associée à un PS) ssi elle vérifie l'identité du parallélogramme$\blacksquare$

3 Orthogonalité

Le contexte et les notations précédents sont conservés.

3.1 Généralités

Définition 2 *I ensemble fini .*
a) x,y, étant dans E,sont orthogonaux (pour $<,>$) si $<x,y>=0$
b) A étant une partie de E, $A^\perp \overset{def}{=} \{x\in E,\forall y\in A,<x,y>=0\}$; c'est l'orthogonal de A.
c) $(x_i)_{i\in I}$,famille de E, est orthogonale si $<x_i,x_j>=0$ pour i,j différents dans I.
d) $(x_i)_{i\in I}$,famille de E, est orthonormée (orthonormale pour certains) si elle est orthogonale et si chaque x_i est unitaire.
e) Une base de E est une base orthogonale (resp. orthonormée) de E si elle constitue aussi une famille orthogonale (resp. orthonormée) de E.

Exemple 2 *A retenir.*
$\boxed{\text{La base canonique de } \mathbb{R}^n \text{ est une base orthonormée de } R^n \text{ muni de son PS standard}}$

Les résultats qui suivent sont fondamentaux.

Proposition 4 *a) $\{0_E\}^\perp=E, E^\perp=\{0_E\}, A\subset B\subset E\Rightarrow B^\perp\subset A^\perp$.*
b) $A^\perp$ sev de E.
c) Si F sev de E, F et $F^\perp$ sont en somme directe.

Définition 3 *F et G, sev supplémentaires dans E, sont dits supplémentaires orthogonaux si $F^{\perp} = G$ ou $F = G^{\perp}$*

Remarque 2 *La définition donnée peut sembler alambiquée mais en dimension non finie un sev et son orthogonal ne sont pas nécessairement supplémentaires. Par exemple dans l'espace préhilbertien $L_c^2([0,1]$, l'orthogonal de $R[X]$ est réduit à la fonction nulle (conséquence du théorème d'approximation polynomiale de Weierstrass HP) et il existe d'autres fonctions continues sur [0,1] que les polynômes.*

Exercice 7 *Prouver par double inclusion et dans le contexte de la définition précédente l'équivalence :* $F^{\perp} = G \Longleftrightarrow F = G^{\perp}$

Solution 7 *Supposons $F^{\perp} = G$ et vérifions que $F = G^{\perp}$; cela prouvera l'équivalence par symétrie des données.*
Soit $x \in F$ alors pour tout y de G : $< x, y >= 0$ donc $x \in G^{\perp}$ soit $\boxed{F \subset G^{\perp}}$square
Inversement si $t \in G^{\perp}$ alors, puisque F et G sont supplémentaires dans E, on peut écrire $t = t_F + t_G$ (avec des notations allant de soi) mais la première inclusion prouve que $t_F \in G^{\perp}$ donc que $t - t_F = t_G \in G^{\perp}$ soit $t_G = 0_E$ (car élément de G et de son orthogonal). Ainsi $t = t_F \in F$ et $\boxed{G^{\perp} \subset F}$. D'où l'égalité$\blacksquare$

Il résulte de la démonstration que nous venons de produire une amélioration notable de la définition précédente.

Corollaire 1 *Soient F et G deux sev supplémentaires dans E.*
Ils sont supplémentaires orthogonaux ssi $F^{\perp} \subset G \Longleftrightarrow < x, y >= 0$ pour tout $(x, y) \in F \times G$.

Exercice 8 *(Ensea MP)($\star$)*
E désigne le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des fonctions numériques C^2 sur $[0, 1]$.
a) Montrer que $(f, g) \to (f \mid g) \stackrel{def}{=} \int_0^1 (fg + f'g')$ définit un PS sur E.
b) Prouver que $F = \{f \in E, f(0) = f(1) = 0\}$ et $G = \{f \in E, f'' = f\}$ sont supplémentaires orthogonaux.

Solution 8 *a) $(.|.)$ a du sens puisque l'intégrande est C^1 sur $[0, 1] = I$. La symétrie, la bilinéarité et la positivité sont assez directes à vérifier. Donnons nous $f \in E$ telle que $(f|f) = 0$; on a donc (intégrande continue et positive d'intégrale nulle) $f = f' = 0$ donc $f = 0$. On a bien un produit scalaire*$\blacksquare$
b) i) F et G sont en somme directe. En effet si $f \in F \cap G$ alors il existe deux réels A et B tels que $f(x) = Ae^x + Be^{-x}$ pour tout $x \in I$ et $A + B = 0$, $Ae + Be^{-1} = 0$. Finalement $A = B = 0$ et $f = 0_E$ $\square$
ii) On montre que $E \subset F + G$ en prenant $h \in E$. Une rapide analyse et synthèse montre que $h = f + g$, où $g(x) = \dfrac{1}{e - e^{-1}}((f(1) - e^{-1}f(0))e^x + (ef(0) - f(1))e^{-x})$ et $f = h - g$. On a bien $f \in F$ et $g \in G$ $\square$
Bilan de ces deux vérifications $\boxed{E = F \oplus G}$ $\square$
iii) Prenons $(f, g) \in F \times G$ et évaluons $(f|g)$.
Une simple IPP donne $(f|g) = \int_I fg + [f(t)g'(t)]_0^1 - \int_I fg'' = 0$ puisque $f(0) = f(1) = 0$ et $g - g'' = 0$. Nous déduisons du corollaire précédent le résultat$\blacksquare$

Finissons par un moyen élégant de prouver que certaines familles sont libres.

Proposition 5 *Une famille de E orthogonale et de vecteurs tous non nuls est libre. Cela vaut donc en particulier pour une famille orthonormée.*

3.2 Théorème de Pythagore

La simplicité de la preuve de ce théorème dans ce contexte plaide en faveur de l'algèbre linéaire comme bonne approche de la géométrie.

Proposition 6 *Si $(x_1, ..., x_n)$ est une famille orthogonale de E :*
$$\left\|\sum_{i=1}^n x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 .$$

Exercice 9 *On se donne une suite (x_n) de vecteurs unitaires et orthogonaux 2 à 2.*
a) Etablir que les vecteurs $x_n + x_m$ et $x_n - x_m$ ($n \neq m$) sont orthogonaux. Quelle est leur norme ?
b) On se place dans l'espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$, la suite (x_n) est-elle convergente ?

Solution 9 *Corrigé avec un groupe.*

3.3 Existence de bases orthonormées pour un espace euclidien

Dans cette sous-section $(E, <, >)$ est euclidien
On dispose alors des propriétés fondamentales recensées par :

Proposition 7 *E admet une base orthonormée.*

On proposera plus loin une détermination pratique d'une telle base.

Proposition 8 *Soit F un sev de E. Alors :*
a) F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires orthogonaux.
b) $\dim F + \dim F^{\perp} = \dim E$.
c) $F^{\perp\perp} = F$.

Exercice 10 *On suppose que F,G sont supplémentaires dans E.*
Etablir qu'il en va de même pour leurs orthogonaux.

Solution 10 *Corrigé avec un groupe.*

3.4 Calculs dans une base orthonormée

Cette sous- section montre que, dans une b.o.n, tout produit scalaire et sa norme associée s'expriment comme pour le produit scalaire canonique.

Proposition 9 *Si $B = (e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormée de E et si x, y sont dans E :*
a) Avec $x \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_B$, $y \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_B$ on a :
$$< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$
$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$$
b) Pour $1 \leq i \leq n, x_i =< e_i, x >$

Exercice 11 *(Grand classique des oraux). E est euclidien de dimension $n \geq 1$ et on dispose de vecteurs $e_1, .., e_n$ de E tels que :*
$$\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} < x, e_i >^2 \ (\star).$$
1) Etablir que chaque e_i est de norme ≤ 1.
On fixe un entier i compris entre 1 et n.
2) Etablir qu'il existe u un vecteur non nul de E orthogonal à e_j, ce pour tout $j \neq i$.
3) En appliquant la formule $(\star)$ à u, prouver que $(e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormée de E.
4) Est-ce encore vrai si la dimension de E n'est plus supposée égale à n ?

Solution 11 *Corrigé avec un groupe.*

4 Projections orthogonales

$(E, <, >)$ est un espace préhilbertien.

4.1 Résultat clé

Commençons par une généralisation d'un résultat antérieur :

Proposition 10 *Si F est un sev de dimension finie de E ,alors F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires orthogonaux.*

Preuve 1 *Considérons pour cela $(e_1, ..., e_p)$, base orthonormée de F (dans le cas où F n'est pas réduit au vecteur nul sinon cette proposition est immédiate) et prenons x de E.*

Cherchons alors $y \in F$ tel que $x - y \in F^{\perp}$; en posant $y = \sum_{i=1}^{p} y_i e_i$:

$x - y \in F^{\perp} \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, p]\!],\ y_i =< e_i, x >$.

y étant trouvé, on peut écrire $x = \underset{\in F}{y} + \underset{\in F^{\perp}}{(x - y)}$ et ainsi $E = F + F^{\perp}$ donc F et $F^{\perp}$ sont bien supplémentaires orthogonaux ■

Remarque 3 *Noter aussi que le double orthogonal de F (i.e $(F^{\perp})^{\perp}$) est égal à F (toujours si F est de dimension finie) puisque en somme directe avec $F^{\perp}$ et contenant (par définition même) F (cette inclusion est toujours vraie elle mais si F n'est plus de dimension finie, elle peut être stricte.*

Corollaire 2 ***Si F est de dimension finie (égale à p) et*** $x \in E$

a)$\exists! y \in F,\ x - y \in F^{\perp}$.

Cet unique vecteur de F est la ***projection orthogonale*** *de x sur F. On la note $p_F(x)$.*

On retiendra que, étant donnée une base b de F :

$\boxed{\text{c'est aussi l'unique vecteur } z \text{ de } F \text{ tel que : } < z, u >=< x, u > \text{ pour tout } u \in b}$.

b) Si $(e_1, ..., e_p)$ base orthonormée de F alors $\boxed{p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} < e_i, x > e_i}$.

c) $\boxed{\sum_{i=1}^{p} |< e_i, x >|^2 \leq \|x\|^2}$ *(Inégalité de Bessel)*

4.2 Distance d'un vecteur à un sev

Définition 4 *Soient F un sev de E et $x \in E$, on définit la distance de x à F comme la borne inférieure de $\{\|x - y\|, y \in F\}$. On la note $d(x, F)$.*

Proposition 11 *Si F est un sev de dimension finie de E et si $x \in E$ alors :*

i) $\|x\|^2 = d(x, F)^2 + \|p_F(x\|^2$.

ii) $d(x, F) = \|x - p_F(x)\| = \|p_{F^{\perp}}(x)\|$

iii) $\exists! y \in F, d(x, F) = \|x - y\|$, à savoir $y = p_F(x)$.

4.3 Orthonormalisation de Gram-Schmidt dans un espace euclidien

On voit bien dans les propositions précédentes l'importance de disposer de b.o.n. Voici un algorithme permettant d'obtenir dans ce cadre des famille orthonormées.

Proposition 12 *Soit $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille libre de E , il existe une famille orthonormée $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ et une seule telle que :*

i) $\forall j, 1 \leq j \leq n, Vect(u_1, ., u_j) = Vect(e_1, .., e_j)$.

ii) $\forall i, 1 \leq i \leq n, < e_i, u_i > \in \mathbb{R}_+$.

En fait $\forall i, 1 \leq i \leq n, e_i = \dfrac{u_i - p_{F_i}(u_i)}{\|u_i - p_{F_i}(u_i)\|}$ où $F_i = Vect(u_1, ..u_{i-1})$.

(comme $p_{F_i}(u_i) = \sum_{j=1}^{i-1} < e_j, u_i > e_j$, la procédure est récursive).

La famille $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$.

4.4 Exercices

Exercice 12 *On munit $M_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire de Schur.*
1) Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux.
2) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Déterminer $d(A, S_n(\mathbb{R}))$.

Solution 12 *1) C'est un fait bien connu que ces deux sev sont supplémentaires. Il nous suffit de vérifier que $< A, B >= 0$ pour A symétrique et B antisymétrique.*
Comme $< A, B >= tr(^tAB) =< B, A >= tr(^tBA)$ on a $tr(AB) = -tr(BA) = -tr(AB)$. Ainsi $tr(AB) = 0 =< A, B >$ $\blacksquare$

2) On sait que la décomposition de A suivant la somme directe orthogonale $S_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} A_n(\mathbb{R})$ est :
$A = \frac{1}{2}(A +^t A) + \frac{1}{2}(A -^t A)$ *donc* $d(A, S_n(\mathbb{R})) = \frac{1}{2}\|A -^t A\|$$\blacksquare$

Exercice 13 *(CCINP PSI)*
$\mathbb{R}^4$ est muni de sa structure euclidienne canonique et on considère $P = Vect((1, 1, 1, 0); (1, 0, 0, -1))$. On pose $u = (1, 1, 1, 1)$.
Déterminer $d(u, P)$.

Solution 13 *Corrigé en classe.*

Exercice 14 *($\star$)*
1) Déterminer le minimum de $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \to \int_0^\infty (x^3 + ax^2 + bx + c)^2 e^{-x} dx$.
2) Etablir que $\min_{(a_0,\dots,a_{n-1})\in\mathbb{R}^n} (\int_0^\infty (x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k)^2 e^{-x} dx) = (n!)^2$.

Solution 14 *Voir Corrigé dernière question du dernier exercice du TD 17.*

Exercice 15 *($\star$)*
On se place dans un espace préhilbertien.
Soient$(x_1, ..., x_n) \in E^n$ et F et $M(x_1, ..., x_n) = ((x_i|x_j)) \in M_n(\mathbb{R})$ (matrice de Gram de la famille $(x_1, ..., x_n)$) dont on note $C_1, ..., C_n$ les colonnes.
1) Soit $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. Etablir l'équivalence :
$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0_E \iff \sum_{i=1}^n \lambda_i C_i = 0_{n,1}$.
On désigne par $G(x_1, ..., x_n)$ (gramien de $(x_1, ..., x_n)$) le déterminant de $M(x_1, ..., x_n)$.
2) Prouver que $G(x_1, ..., x_n) \neq 0 \iff (x_1, ..., x_n)$ famille libre de E.
3) On suppose que $(x_1, ..., x_n)$ est une famille libre de E et on note F le sev de E qu'engendre cette famille.
On se donne b une b.o.n de F et on note X la matrice des composantes de $(x_1, ..., x_n)$ dans la base b.
a) Comparer $M(x_1, ..., x_n)$ et X^tX.
b) En déduire que le gramien d'une famille de vecteurs d'un espace préhilbertien est positif.
c) Soit $x \in E$. Prouver que $d(x, F)^2 = \dfrac{G(x, x_1, ..., x_n)}{G(x_1, ..., x_n)}$.

Solution 15 *Sera Corrigé en classe ce mercredi.*