Corrigé du TD 16 : Suites et Séries de Fonctions et EVN

Exercice ($\star$) 1 *(CCINP 2021)*
Dans cet exercice, on souhaite déterminer les fonctions $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ *vérifiant les relations :* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ *et* $\forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x+1)+f(x) = \dfrac{1}{x^2}. \qquad (P)$

Partie I - Existence et unicité de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on démontre que le problème (P) admet une unique solution et on détermine une expression de celle-ci sous la forme d'une série de fonctions.

I.1 - Existence de la solution

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $\varphi_k :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \varphi_k(x) = \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}.$$

1. *Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{k\geq 0} \varphi_k$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.*

Dans tout les reste de cet exercice, on note $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la somme de la série $\sum\limits_{k\geq 0} \varphi_k$.

2. *Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a $\varphi(x+1)+\varphi(x) = \dfrac{1}{x^2}$.*
3. *En utilisant le théorème spécial des séries alternées, montrer que :*

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k(x)\right| \leq \frac{1}{(x+n+1)^2}.$$

4. *Montrer que la fonction φ est une solution de (P).*

I.2 - Unicité de la solution

5. *Montrer que si $f :]0,+\infty \to \mathbb{R}$ est une solution de (P), alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :*

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}.$$

6. *En déduire que la fonction φ est l'unique solution de (P).*

Exercice ($\star$) 2 *Suite CCINP 2021*

Partie II - Etude de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on étudie quelques propriétés de l'unique solution $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ *du problème* (P).

7. *Soit* $\varepsilon > 0$. *Montrer que la série de fonctions* $\sum_{k\geq 0} \varphi_k$ *converge uniformément sur* $[\varepsilon, +\infty[$.

8. *Montrer que la fonction* φ *est continue sur* $]0,+\infty[$. *En utilisant le fait que* φ *est une solution du problème* (P), *en déduire un équivalent simple de* φ *au voisinage de* 0^+.

9. *Justifier que la fonction* φ *est dérivable sur* $]0,+\infty[$ *et que l'on a :*

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \varphi'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}.$$

10. *En déduire que la fonction* φ *est décroissante sur* $]0,+\infty[$.

11. *En utilisant le résultat de la question précédente et la relation* (P), *montrer que :*

$$\forall x \in]1,+\infty[, \quad \frac{1}{x^2} \leq 2\varphi(x) \leq \frac{1}{(x-1)^2}.$$

En déduire un équivalent de φ *en* $+\infty$.

Exercice ($\star$) 3 *(Domaine de définition d'une fonction rationnelle)*
Soit $f = \dfrac{P}{Q}$, *où* P, Q *sont des fonctions polynômes à coefficients dans* $\mathbb{K}$ *et à* n *variables.*
Etablir que le domaine de définition de f *est une partie ouverte de* K^n.

Solution : Q, polynomiale, s'en trouve continue de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}$ ainsi $F = Q^{-1}(\{0\})$ est un fermé de K^n et $U = \mathbb{K}^n \setminus F$, qui est justement le domaine de définition de f, est un ouvert de $\mathbb{K}^n$ ■

Exercice ($\star\star$) 1 *(Se référer au TD 14 pour les notations)*
Soient $(E, \|.\|)$ *un espace vectoriel normé de dimension finie et* A *une partie fermée non vide de* E.
On se donne x *un élément de* E *non situé dans* A *et* a *un élément de* A *et on pose* $r = \|x-a\| > 0$.
i) Etablir que $B = A \cap B'(x,r)$ *est une partie compacte de* E *non vide.*
ii) A l'aide du théorème de Weierstrass, montrer qu'il existe $b \in B$ *tel que* $\|y-x\| \geq \|b-x\|$.
iii) Vérifier alors que $d(x,A) = \|b-x\|$ *(autrement dit, en dimension finie, la distance à un fermé non vide est atteinte).*

Solution : i) B en tant qu'intersection de deux fermés de E est déjà une partie fermée de E.
B est incluse dans $B'(x,r)$ donc B est bornée.
Par définition de r, a appartient à $B'(x,r)$ et a est un élément de A par hypothèse. B n'est donc pas vide puisque a appartient à cet ensemble□
ii) L'application ϕ qui à y in A associe $\|y-x\|$ est <u>continue</u> car (inégalité triangulaire inverse) elle est 1-lipschitzienne; elle est aussi <u>à valeurs réelles</u> et continue sur le <u>compact</u> B, elle présente bien sur ce compact un <u>minimum</u>, noté b, qui répond à la question□
iii) Il suffit de montrer que pour tout $y \in A$, $\phi(y) \geq \phi(b)$. Cette inégalité est satisfaite pour $y \in B$ d'après la question précédente.
Maintenant si $y \in A \setminus B$ alors $y \notin B'(x,r)$ donc $\|y-x\| > r \geq \|b-x\|$ puisque $b \in B'(x,r)$ d'où la vérification souhaitée■