Corrigé du TD 16 bis : Suites et Séries de Fonctions et EVN

Exercice (⋆⋆) 1 *(ENS LYON second concours)*
On définit $\cot = \dfrac{\cos}{\sin}$.
1) Domaine de définition de cette fonction, périodicité, autre propriété?
2) Sous réserve de sens, prouver que $\cot\dfrac{x}{2} + \cot\dfrac{x+\pi}{2} = 2\cot x$.
On posera, pour x à préciser, $f(x) = \pi\cot\pi x$, *et*
pour $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ *et* $n \in \mathbb{N}$, $u_n(x) = \dfrac{1}{x+n} + \dfrac{1}{x-n}$ *si* $n \geq 1$ *et* $u_0(x) = \dfrac{1}{x}$.
3) Etablir que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *converge simplement sur son domaine de définition. On note U la somme de cette série de fonctions.*
4) Prouver que U est impaire et 1-périodique.
5) Montrer que $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *converge normalement sur tout segment de* $]0,1[$. *Qu'en déduire pour U?*
6) Vérifier que pour $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z} : U\left(\dfrac{x}{2}\right) + U\left(\dfrac{x+1}{2}\right) = 2U(x)$.
On pose $h = f - U$.
7) Montrer que h se prolonge par continuité à $\mathbb{R}$ tout entier. On note toujours h ce prolongement.
8) Prouver qu'il existe $a \in [0,1]$ *tel que :* $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) \leq h(a)$.
9)a) Etablir que la relation vérifiée en 6) est satisfaite par h.
b) Montrer alors que $h(\dfrac{a}{2}) = h(a)$.
c) En déduire que $h = 0$ et l'identité dont on donnera le domaine de validité:
$\pi\cot\pi x = \dfrac{1}{x} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{x+n} + \dfrac{1}{x-n}\right)$.
10) Déterminer les valeurs de $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{9n^2-1}$ *et* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{16n^2-1}$.

Solution :
1) Le domaine de définition $\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$, cette fonction est π-périodique et impaire.
2) La formule a du sens si x non multiple de π et pour un tel x : $\cot\dfrac{x}{2} + \cot\dfrac{x+\pi}{2} = \dfrac{\cos x/2}{\sin x/2} - \dfrac{\sin x/2}{\cos x/2} = \dfrac{\cos x}{\frac{1}{2}\sin x} = 2\cot x$, grâce aux formules de duplication.
3) On fixe un réel x non entier et pour $n \geq 1, |u_n(x)| = \dfrac{2|x|}{|n^2 - x^2|} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{2|x|}{n^2}$.
Par comparaison des séries à termes positifs, puisque $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge, $\sum\limits_{n\geq 0} u_n(x)$ converge absolument donc converge. Il en résulte la convergence simple de $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ sur l'ensemble proposé.
4) L'imparité résulte de celles des u_n et de la symétrie par rapport à 0 du domaine de définition de U, noté D. Pour la périodicité, notons que $x \in D \Rightarrow x+1 \in D$ et, en revenant aux sommes partielles de $\sum u_n$, on a, pour $N \geq 1$ et $x \in D$:
$u_0(x+1) + \sum\limits_{n=1}^{N} u_n(x+1) = \dfrac{1}{x+1} + \sum\limits_{n=1}^{N}\left(\dfrac{1}{x+n+1} + \dfrac{1}{x-n+1}\right)$ en scindant en deux la dernière somme et avec changements d'indices, il vient : $u_0(x+1) + \sum\limits_{n=1}^{N} u_n(x+1) = \dfrac{1}{x+1} + \sum\limits_{n=2}^{N+1}\dfrac{1}{x+n} + \sum\limits_{n=0}^{N-1}\dfrac{1}{x-n} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+N+1} + \dfrac{1}{x+N} + \sum\limits_{n=1}^{N-1} u_n(x)$. Il suffit alors de faire tendre N vers $+\infty$ pour obtenir $U(x+1) = U(x)$.

5) Prenons $[a,b]\subset]0,1[$.Pour $n\geq 2, x\in[a,b], |u_n(x)|=\dfrac{2x}{n^2-x^2}\leq\dfrac{2b}{n^2}$ donc, par passage à la borne supérieure :

$\|u_n\|_\infty^{[a,b]}\leq\dfrac{2b}{n^2}$. La convergence normale souhaitée en découle.

Comme chaque u_n est continue sur]0,1[et qu'il y a convergence normale sur tout segment de]0,1[de $\sum u_n, U$, par le théorème C^0 pour les séries de fonctions, est continue sur]0,1[donc par 1-périodicité sur D.

6) Même technique qu'en 4); pour $N\geq 1$ et $x\in D$, on a successivement :

$$S_N \overset{def}{=} u_0(\frac{x}{2})+\sum_{n=1}^{N}u_n(\frac{x}{2})+u_0(\frac{x+1}{2})+\sum_{n=1}^{N}u_n(\frac{x+1}{2})$$

Soit aussi $S_N=2(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}+\sum_{n=1}^{N}\dfrac{1}{x+2n}+\sum_{n=1}^{N}\dfrac{1}{x-2n}+\sum_{n=1}^{N}\dfrac{1}{x+2n+1}+\sum_{n=1}^{N}\dfrac{1}{x-(2n-1)})$, puis en groupant la première avec la troisième somme et la seconde et la quatrième,

$$S_N=2(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\sum_{m=2}^{2N+1}\frac{1}{x+m}+\sum_{m=1}^{2N}\frac{1}{x-m})=2\sum_{m=0}^{2N}u_m(x)+\frac{2}{x+2N+1}.$$

On conclut en faisant tendre N vers $+\infty$.

7) h hérite de propriétés commune de f et U : 1-périodicité, imparité et continuité sur D.

Prouver que h est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$ revient donc à vérifier que h posséde une limite à droite finie en 0 (celle-ci sera nécessairement nulle). On peut écrire pour $x\in]0,1[$: $h(x)=\pi\cot\pi x-\dfrac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$.

On posera $V(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ mais pour $x\in[0,1/2]$.

En reprenant l'argumentaire du 5), on montre que $\sum_{n\geq 1}u_n$ converge normalement sur $[0,1/2]$ donc V est continue en 0, comme $V(0)=0$ (puisque pour $n\geq 1, u_n(x)=\dfrac{2x}{n^2-x^2}$), il s'ensuit que $V(x)\underset{x\to 0^+}{\to}0$.

Il reste à analyser le comportement de $\pi\cot\pi x-\dfrac{1}{x}$ si $x\to 0^+$.

Pour cela, on voit que de $\pi\cot\pi x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi x\cos(\pi x)-\sin(\pi x)}{x\sin(\pi x)}=\dfrac{o(x^2)}{\pi x^2+o(x^2)}=o(1)$ donc on a bien $h(x)\underset{x\to 0^+}{\to}0$.

8) La périodicité de h fait que $h(\mathbb{R})=h([0,1])$; h étant désormais continue sur ce segment, elle y présente un maximum; posons a un tel point, il vérifie l'inégalité désirée.

9)a) Calcul direct.

b) On sait que $h(a/2)+h(\dfrac{a+1}{2})=2h(a)$ donc $(h(a)-h(a/2))+(h(a)-h(\dfrac{a+1}{2}))=0$ et, par a), chaque parenthèse est positive; elles sont donc nulles et $h(a)=h(a/2)$.

c) Par simple itération : $\forall n$, $h\left(\dfrac{a}{2^n}\right)=h(a)$ donc par passage à la limite (h continue en 0 et $h(0)=0$), il vient $h(a)=0\Rightarrow h\leq 0$ et h est impaire donc $h=0$. L'identité en découle, elle est valide sur D.

10) La relation obtenue en 9)c) spécialisée en $\dfrac{1}{3}$ donne :

$$\pi\cot\frac{\pi}{3}=3-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{9n^2-1}\Rightarrow\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9n^2-1}=-\frac{\pi\sqrt{3}}{18}+\frac{1}{2}}.$$

Avec $x=1/4$: $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{16n^2-1}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{8}\pi}$ ■

Exercice (⋆⋆) 2 *(Utilisation continuité déterminant)*
1) Etablir que $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense de $M_n(K)$.
2) En déduire que si A et B sont dans $M_n(K)$ alors $\chi_{AB}=\chi_{BA}$.

Solution :

1) L'application det étant continue de $M_n(K)$ dans K, l'ensemble $\overset{-1}{\det}(\{0\})$ est un fermé de $M_n(K)$. Le complémentaire (dans $M_n(K)$) de cet ensemble est l'ensemble des matrices de $M_n(K)$ de déterminant non nul i.e $GL_n(\mathbb{K})$. Ainsi en tant que complémentaire d'un fermé de $M_n(K)$, il s'agit bien d'un ouvert de ce même ensemble□

Soit $A\in M_n(K)$, trouvons donc une suite (B_p) à termes dans $GL_n(\mathbb{K})$ convergeant vers A.

On peut aussi supposer A non inversible (sinon prendre $B_p = A$ pour tout p).
Il est assez naturel de penser à utiliser la suite $(A - \frac{1}{p}I_n)$. Soit $a > 0$ tel que toute valeur propre complexe et non nulle de A soit de module $> a$ (s'il n'y a pas de vp non nulle, tant mieux), alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{p} < a$, les matrices $A - \frac{1}{p}I_n$ sont inversibles (puisque $\chi_A(1/p) \neq 0$ pour p assez grand) et $A - \frac{1}{p}I_n \underset{p\to\infty}{\to} A$■
2) Si A ou B est inversible AB et BA étant semblables (par ex. $BA = A^{-1}(AB)A$), le résultat est clair.
Fixons $\lambda \in \mathbb{K}$ et considérons une suite de matrices inversibles A_p convergeant vers A. Grâce au début de cette réponse, on a, pour tout entier naturel p, $\det(\lambda I_n - A_pB) = \det(\lambda I_n - BA_p)$.
Il suffit alors de faire tendre vers ∞ (les continuités des aplications linéaires de $X \in M_n(\mathbb{R}) \to BX$, $X \in M_n(\mathbb{R}) \to XB$ et du déterminant) pour obtenir le résultat■

Exercice ($\star\star\star$) 1 *(Bolzano-Weierstrass)*
Déduire du théorème de Weierstrass que de toute suite bornée d'un evn de dimension finie, on peut extraire une suite convergente.
Montrer que ce n'est plus vrai dans $L^2_c([0, 2\pi])$.

Solution :
i) Notons (x_n) une telle suite et supposons que l'on n'en puisse extraire aucune suite convergente.
Cela signifie que tout voisinage d'un terme de la suite ne peut comporter qu'un nombre fini de termes de la suite (*). Ainsi, en notant F l'ensemble des termes, on voit qu'une suite à termes dans F convergente ne peut être que stationnaire; ce qui montre que F est fermé et borné. Ainsi F est compact. Réagençons F qui ne peut être fini en une suite y_m de termes deux à deux distincts et définissons f de Fdans $\mathbb{R}$ par : $f(y_m) = \frac{1}{m+1}$. La propriété (*) montre que f est continue sur un compact et à valeurs réelles mais elle ne poosède pas de minimum■
ii) Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \sin(nx)$, alors pour tous les entiers naturels non nuls et différents n et m : $\|f_n - f_m\|^2 = 2\pi$, ce qui montre que de la suite bornée (f_n) (facile à voir) on ne peut extraire aucune suite convergente■

Exercice ($\star\star$) 3 *(Double limite)*
On se donne (f_n) une suite de fonctions convergeant uniformément vers une fonction f sur $\mathbb{R}_+$ en supposant en outre que chaque fonction f_n admette en $+\infty$ une limite finie l_n.
Etablir que la suite (l_n) converge; on note L la limite de cette suite.
Prouver ensuite que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\to} L$.

Solution :
Il suffit d'appliquer le théorème de double limite à la série de fonctions $\sum_{n\geq 0}(f_{n+1} - f_n)$■