

Feuille d'exercices 8

ÉLÉMENTS DE CORRECTION

Exercice 1.

$$(d) \int \frac{dx}{x \ln(x^2)} \underset{u(x)=\ln(x^2)}{=} \frac{1}{2} \int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \frac{1}{2} \ln(\ln(x^2)) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2. Notons $\alpha = a + ib$, alors :

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{t - \alpha} &= \int \frac{t - a + ib}{(t - a)^2 + b^2} dt \\ &= \int \frac{t - a}{(t - a)^2 + b^2} dt + i \int \frac{\frac{1}{b}}{1 + \left(\frac{t-a}{b}\right)^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \ln((t - a)^2 + b^2) + i \arctan\left(\frac{t - a}{b}\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exercice 3. Par l'absurde, supposons que cette fonction admette une primitive F .

Alors : $\forall x \leq 0, F'(x) = 0$ et $\forall x > 0, F'(x) = 1$. Il existe donc $c, d \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall x < 0, F(x) = c$ et $\forall x > 0, F(x) = x + d$.

La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car c'est une primitive), donc en particulier F est continue en 0, donc $c = d = F(0)$. Alors : $\forall x \neq 0, \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = 1$ si $x > 0, 0$ si $x < 0$. Donc F n'est pas dérivable en 0, ce qui est absurde. Donc F n'existe pas.

Exercice 4.

(a) Comme $x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et que $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0, f n'a pas de limite en 0, donc f n'est pas continue en 0.

(b) On a directement $F' = f$.

Il n'est donc pas nécessaire d'être continue pour être primitivable.

Exercice 8. On a : $\forall x \in [-\pi, \pi], \sin(px) \sin(qx) = \frac{1}{2} (\cos((p - q)x) - \cos((p + q)x))$, donc :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(px) \sin(qx) dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos((p - q)x) - \cos((p + q)x)) dx \\ &\underset{\text{si } p \neq \pm q}{=} \frac{1}{2} \left[\frac{\sin((p - q)x)}{p - q} - \frac{\sin((p + q)x)}{p + q} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{\sin((p - q)\pi)}{p - q} - \frac{\sin((p + q)\pi)}{p + q} \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\text{Si } p = q : \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(px) dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos(2px)) dx \underset{\text{si } p \neq 0}{=} \left[x - \frac{\sin(2px)}{2p} \right]_{-\pi}^{\pi} = 2\pi.$$

$$\text{Si } p = -q : \int_{-\pi}^{\pi} \sin(px) \sin(-px) dx = - \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(px) dx \underset{\text{si } p \neq 0}{=} -2\pi.$$

$$\text{Si } p = q = 0 : \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(0x) dx = 0.$$

Exercice 9.

$$(b) \int \frac{dx}{x^2 - 6x + 9} = \int \frac{dx}{(x-3)^2} = -\frac{1}{x-3} + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

$$(d) \int \frac{dx}{8x^2 + 50} = \frac{1}{50} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{2x}{5}\right)^2} = \frac{1}{20} \arctan\left(\frac{2x}{5}\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Exercice 10.

(c) Notons $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{4t} \cos(3t) dt$. On procède par double IPP :

$$\begin{aligned} I &= \left[\frac{e^{4t}}{4} \cos(3t) \right]_0^{\frac{\pi}{6}} + \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{e^{4t}}{4} \times 3 \sin(3t) dt \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(\left[\frac{e^{4t}}{4} \sin(3t) \right]_0^{\frac{\pi}{6}} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{e^{4t}}{4} \times 3 \cos(3t) dt \right) \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(\frac{e^{\frac{2\pi}{3}}}{4} - \frac{3}{4} I \right) \\ &= -\frac{9}{16} I + \frac{3e^{\frac{2\pi}{3}} - 4}{16}, \end{aligned}$$

$$\text{donc } \frac{25}{16} I = \frac{3e^{\frac{2\pi}{3}} - 4}{16}, \text{ donc } I = \frac{3e^{\frac{2\pi}{3}} - 4}{25}.$$

Exercice 11.

$$(a) \int_1^e (\ln(t))^2 dt = [(t \ln t - t) \times \ln t]_1^e - \int_1^e (\ln t - 1) dt = [2t - t \ln t]_1^e = e - 2,$$

$$(b) \int_0^1 x^a (1-x)^b dx = \left[\frac{x^{a+1}}{a+1} (1-x)^b \right]_0^1 + \frac{b}{a+1} \int_0^1 x^{a+1} (1-x)^{b-1} dx = \frac{a!b!}{(a+b+1)!},$$

$$(c) \int_0^1 x^a (\ln x)^b dx = \left[\frac{x^{a+1}}{a+1} (\ln x)^b \right]_0^1 - \frac{b}{a+1} \int_0^1 x^a (\ln x)^{b-1} dx = (-1)^b \frac{b!}{(a+1)^{b+1}},$$

$$(d) I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt = [t(1-t^2)^n]_0^1 + 2n \int_0^1 t^2 (1-t^2)^{n-1} dt,$$

$$\text{donc } I_n - 2nI_{n-1} = -2nI_n, \text{ donc } I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Exercice 12.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a, par double IPP :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= [-x^{n+1} \cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)x^n \cos(x) dx \\ &= (n+1) \left([x^n \sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} nx^{n-1} \sin(x) dx \right) \\ &= (n+1) \left(\frac{\pi}{2} \right)^n - n(n+1)I_{n-1}. \end{aligned}$$

(b) La formule de récurrence étant d'ordre 2, on a besoin d'une double initialisation :

$$\bullet I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx = [-\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1,$$

$$\bullet I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x) dx = [-x \cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx = [\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} I_n &= n \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} - n(n-1)I_{n-2} \\ &= n \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} - n(n-1)(n-2) \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-3} + n(n-1)(n-2)(n-3)I_{n-4} \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} (-1)^k \frac{n!}{(n-2k-1)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-2k-1} + (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} n! \end{aligned}$$

Exercice 13.

$$(c) \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x} dx \underset{t=\ln x, dt=\frac{dx}{x}}{=} \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1},$$

$$(d) \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \cos(\sqrt{x}) dx \underset{t=\sqrt{x}, dx=2t dt}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2t \cos(t) dt = [2t \sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin t dt = \pi - 2.$$

Exercice 14.

(a) Direct par le changement de variables $x = \frac{\pi}{4} - t$.

(b) $\forall t \in \mathbb{R}$, $\cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t + \sin t)$, donc d'après (a) :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos t) dt = -\frac{\pi \ln(2)}{8} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos t + \sin t) dt,$$

$$\text{et donc : } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{\cos t + \sin t}{\cos t}\right) dt = \frac{\pi \ln(2)}{8}.$$

Exercice 15. On pose $x = \sin t$. On a $dx = \cos t dt$, donc :

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \int \cos^2 t dt = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2}\right) dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + c,$$

donc :

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 16. Les règles de Bioche permettent de déterminer un changement de variable adapté dans une fraction trigonométrique grâce à ses symétries :

- si $f(-x)d(-x) = f(x)dx$, alors on pose $t = \cos x$,
- si $f(\pi - x)d(\pi - x) = f(x)dx$, alors on pose $t = \sin x$,
- si $f(\pi + x)d(\pi + x) = f(x)dx$, alors on pose $t = \tan x$.

$$(a) \int \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx \underset{t=\cos x}{=} \int \frac{-dt}{1+t} = -\ln|1+t| + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

$$(b) \int \frac{\cos x}{\sin^2 x - \cos^2 x} dx \underset{t=\sin x}{=} \int \frac{dt}{2t^2 - 1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t - \frac{1}{\sqrt{2}}}{t + \frac{1}{\sqrt{2}}} \right| + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned}
\text{(c)} \quad \int \frac{3 - \sin x}{\cos x + 3 \tan x} dx &\stackrel{t=\sin x}{=} \int \frac{3 - t}{1 + 3t - t^2} dt = \int \left(\frac{1}{2} \frac{2t - 3}{t^2 - 3t - 1} - \frac{3}{2} \frac{1}{t^2 - 3t - 1} \right) dt \\
&= \frac{1}{2} \ln |t^2 - 3t - 1| - \frac{3}{2} \ln \left| \frac{2t - 3 + \sqrt{13}}{2t - 3 - \sqrt{13}} \right| + c, \quad c \in \mathbb{R}, \\
\text{(d)} \quad \int \cos^2 x \sin^2 x dx &\stackrel{t=\tan x}{=} \int \frac{t^2}{(1 + t^2)^3} dt = \int \frac{t}{4} \frac{4t}{(1 + t^2)^3} dt = -\frac{1}{4} \frac{t}{(1 + t^2)^2} + \frac{1}{4} \int \frac{dt}{(1 + t^2)^2} \\
&= -\frac{1}{4} \frac{t}{(1 + t^2)^2} + \frac{1}{8} \arctan(t) + \frac{1}{8} \frac{t}{1 + t^2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Exercice 17. On a $\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1 + t^2}$, $\tan x = \frac{2t}{1 - t^2}$ et $dx = \frac{2}{1 + t^2} dt$, donc :

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 + \cos x} &= \int_0^1 \frac{2dt}{3 + t^2} = \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{dt}{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\arctan \left(\frac{t}{\sqrt{3}} \right) \right]_0^1 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}, \\
\text{(b)} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 - \sin x} &= \int_0^1 \frac{dt}{1 - t + t^2} = \int_0^1 \frac{dt}{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \\
&= \frac{4}{3} \int_0^1 \frac{dt}{1 + \left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\arctan \left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}} \right) \right]_0^1 = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}, \\
\text{(c)} \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin x - \cos x + \sqrt{2}} &= \int_0^{\tan \frac{\pi}{8}} \frac{2dt}{(1 + \sqrt{2})t^2 + 2t + \sqrt{2} - 1} \\
&= \frac{2}{1 + \sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2}-1} \frac{dt}{t^2 + 2(\sqrt{2} - 1)t + (\sqrt{2} - 1)^2} = 2(\sqrt{2} - 1) \int_0^{\sqrt{2}-1} \frac{dt}{(t + (\sqrt{2} - 1))^2} \\
&= 2(\sqrt{2} - 1) \left[-\frac{1}{t + (\sqrt{2} - 1)} \right]_0^{\sqrt{2}-1} = 1.
\end{aligned}$$