# Corrigé TD 15 : Suites et Séries de Fonctions

**Exercice ($\star$) 1** *(ENSEA)*
*Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in I = [0,1]$, on pose $f_n(x) = \dfrac{n^2x^2}{1+n^3x^3}$.*
*a) Etude de la convergence simple et uniforme sur $I$ de la suite de fonctions $(f_n)$.*
*b) Même question pour la suite de fonctions $(f_n')$.*

**Solution :**
a) En séparant le cas $x = 0$ du cas $x \neq 0$, on voit aisément, qu'à $x$ fixé, la suite de réels $(f_n(x))$ converge vers 0. Il en résulte que la suite de fonctions $(f_n)$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.
On remarque que $f_n(1/n) = 1/2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui interdit la convergence uniforme sur tout segment contenant 0 donc sur $\mathbb{R}$■
b) Mêmes résultats avec les mêmes démarches■

**Exercice ($\star\star$) 1** *(Exemple de Cantor)*
*Pour tout entier naturel $n$ et tout réel positif $x$, on définit $f_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$.*
*a) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.*
*b) Prouver que la convergence n'est pas uniforme mais qu'elle le devient sur tout intervalle du type $[a,+\infty[$, où $a > 0$.*

**Solution :**
a) $x$ réel positif étant fixé, nous avons :
$f_n(x) = 0$ si $x = 0$ et pour tout $n$ sinon $f_n(x) \sim \dfrac{2}{nx}$. Ce qui montre que $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ pour tout réel $x$.
Ainsi la suite $(f_n)$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$■
b) Soit $n$ un entier naturel non nul. La fonction $f_n$ étant dérivable sur $\mathbb{R}_+$, une rapide étude de ses variations montre qu'elle croît entre 0 et $1/n$ puis qu'elle décroît.
Comme $f_n(1/n) = 1$, il n'y a pas convergence uniforme de la suite $(f_n)$ vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$.
En revanche pour $n$ assez grand, $1/n < a$ et $|f_n(x)| = f_n(x) \leq f_n(a)$ pour tout $x \in [a,+\infty[$ et pour $n$ assez grand (puisque les $f_n$ décroissent APCR sur cet intervalle). Comme la suite à termes positifs $(f_n(a))$ converge vers 0 (cf CVS), il y a bien convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)$ vers la fonction nulle sur $[a,+\infty[$■

**Exercice ($\star$) 2** *(CCINP PSI)*
*Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(nt)}{1+n^4t^3}dt$.*
*a) Valider l'existence de $I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*
*b) On fixe $n \in \mathbb{N}^*$, vérifier que $I_n = \dfrac{J_n}{n^{5/3}}$, où $J_n = \displaystyle\int_0^\infty n^{1/3}\frac{\sin(n^{-1/3}x)}{1+x^3}dx$.*
*c) Etablir que la suite $(J_n)$ converge vers $K = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{1+x^3}dx$. En déduire la limite de la suite $(I_n)$.*
*d) A l'aide d'un changement de variable, prouver que $K = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^3}dx$.*
*e) Prouver que $2K = \dfrac{4\pi}{3\sqrt{3}}$.*
*f) En déduire un équivalent de $I_n$ si $n \to \infty$.*

**Exercice ($\star\star$) 2** *(IMT et CVD?)*
*Déterminer la limite de la suite ($I_n = \displaystyle\int_0^\infty f_n(t)dt$) si : i) $f_n(t) = \dfrac{t^n}{1+t^{2n}}$ et ii) $f_n(t) = \dfrac{n\sin(t/n)}{t(1+t^2)}$.*

**Exercice (⋆⋆⋆) 1** *(Mines)*
*On se donne une suite $(f_n)$ de fonctions croissantes, continues sur $[0,1]$ et convergeant simplement sur cet intervalle vers une fonction $f$ qui y est lipschitzienne.*
*a) Prouver que $f$ est croissante sur $[0,1]$.*
*b) Etablir que la suite $(f_n)$ converge uniformément vers $f$ sur $[0,1]$(Dini).*

**Solution :**
a) Fixons $x \geq y$ dans $[0,1]$. Pour tout $n$ nous avons $f_n(x) \geq f_n(y)$ (par croissance des fonctions $f_n$) donc, par conservation des inégalités à la limite, $f(x) \geq f(y)$ d'où la croissance de $f$■
b) On se donne $\epsilon > 0$ et on montre qu'il existe $n_0$ à partir duquel et pour tout $x \in [0,1]$ on a : $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$ (1).
On note $K > 0$ un rapport de Lipschitz associé à $f$ et on choisit un entier naturel non nul $p$ tel que $\dfrac{K}{p} \leq \epsilon$ et posons, pour $i \in [\![0,p]\!]$, $a_i = \dfrac{i}{p}$.
Les $p+1$ suites $(f_n(a_i))$ convergeant vers $f(a_i)$, il existe un entier $n_0$ tel que $|f_n(a_i) - f(a_i)| \leq \epsilon$ (2) pour tout $n \geq n_0$ et tout $i \in [\![0,p]\!]$. Ainsi (1) est établi pour $x = a_i$, $i \in [\![0,p]\!]$.
Considérons $n \geq n_0$ et $x \in [0,1]$ différent de tous les $a_i$. Il existe donc unique $i \in [\![0,p-1]\!]$ tel que $x \in ]a_i, a_{i+1}[$. Dès lors, par inégalité triangulaire :
$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_n(a_i)| + |f_n(a_i) - f(a_i)| + |f(a_i) - f(x)| \leq f_n(x) - f_n(a_i) + \epsilon + K|x - a_i|$, en utilisant la croissance de $f_n$, (2) et le caractère $K$ lipschitzien de $f$.
Ainsi $|f_n(x) - f(x)| \leq f_n(a_{i+1}) - f_n(a_i) + \epsilon + \dfrac{K}{p} \leq |f_n(a_{i+1}) - f(a_{i+1})| + |f(a_{i+1}) - f(a_i)||f(a_i) - f_n(a_i)| + 2\epsilon$ (à nouveau inégalité triangulaire).
Enfin avec (2) et le caractère lipschitzien de $f$ : $|f_n(x) - f(x)| \leq 5\epsilon$, ce qui donne (ajustement formel) (1).
On notera que la continuité des $f_n$ est superflue■

**Exercice (⋆⋆⋆⋆) 1** *(X)*
*Soient $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ et, pour tout $n$ et tout $x \in [0,1]$, $P_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(\frac{k}{n}) x^k (1-x)^{n-k}$.*
*On admet que la suite de fonctions $(P_n)$ converge uniformément vers $f$ sur $[0,1]$.*
*Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $f$ soit limite uniforme sur $[0,1]$ d'une suite de polynômes à coefficients entiers.*

**Solution :**
Supposons que $f$ soit limite uniforme sur $I = [0,1]$ d'une suite de polynômes à coefficients entiers que nous notons $(Q_n)$.
Ce contexte implique que les suites à termes entiers $(Q_n(0))$ et $(Q_n(1))$ convergent respectivement vers $f(0)$ et $f(1)$. Il en résulte une condition nécessaire de notre problématique : $\boxed{(f(0), f(1)) \in \mathbb{Z}^2}$■
Il s'agit maintenant de prouver que cette condition est aussi suffisante.
Supposons la satisfaite et donnons nous $\epsilon > 0$, il nous suffit d'exhiber $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que :
$\forall x \in I$, $|f(x) - P(x)| \leq \epsilon$ (1).
L'énoncé nous affirme qu'il existe un entier $n$ tel que pour tout $x \in I$, $|f(x) - P(x)| \leq \dfrac{\epsilon}{2}$ et on peut choisir un tel $n$ aussi grand que voulu donc il est loisible d'exiger que $\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{\epsilon}{2}$ Considérons alors $P = f(0)(1-X)^n + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} (\lfloor \binom{n}{k} f(\frac{k}{n}) \rfloor x^k (1-x)^{n-k}) + f(1)X^n$, ce polynôme appartient à $\mathbb{Z}[X]$ et pour vérifier (1), il va nous suffire de montrer que, pour tout $x \in I$, $|P(x) - P_n(x)| \leq \dfrac{\epsilon}{2}$. Soit $x \in I$ alors par inégalité triangulaire et le fait que $|u - \lfloor u \rfloor| \leq 1$ pour tout réel $u$ :
$|P(x) - P_n(x)| \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} x^k (1-x)^{n-k} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{1}} x^k (1-x)^{n-k}$, ce puisque $\binom{n}{1} \leq \binom{n}{k}$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$.
(On rappelle que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} (x + 1 - x)^n = 1$)
Dés lors $|P(x) - P_n(x)| \leq \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{\epsilon}{2}$■

**Exercice ($\star$) 3** *(Exemple de Pringsheim)*

*Soit* $f : x \to x^2 \sum_{n=1}^{\infty} (1+x^2)^{-n-1}$

*a) Domaine de définition ?*

*b) Exprimer* $f$*. Continuité de cette fonction?*

*c) Y-a-t-il convergence uniforme sur* $[-1,1]$*?*

**Exercice ($\star$) 4** *Pour* $x \geq 0$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$*, on pose* $u_n(x) = \dfrac{1}{(n+x)^2}$.

*1) Montrer que la série de fonctions* $\sum u_n$ *converge simplement sur* $\mathbb{R}_+$*.*

*On note* $U$ *la somme de cette série de fonctions.*

*2) Vérifier que* $U$ *est de* $C^1$ *sur* $\mathbb{R}_+$ *en précisant sa dérivée.*

*3)* $U$ *possède -t-elle une limite finie en* $+\infty$*?. La déterminer en utilisant le théorème de la double limite.*

*4) Par comparaison série - intégrale, déterminer un équivalent de* $U$ *en* $+\infty$*.*

**Exercice ($\star\star$) 3** *(Formule de Leibniz)*

*Pour* $x \in I = [0,1]$*, on pose* $u_n(x) = (-1)^n x^{2n}$*.*

*a) Prouver que* $\sum_{n \geq 0} u_n$ *converge normalement sur tout segment de* $J = [0,1[$*.*

*b) En déduire que* $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ *pour tout* $x \in ]-1,1[$*.*

*c) En utilisant un théorème adapté, prouver que l'égalité précédente est vraie pour* $x = \pm 1$*.*

**Exercice ($\star\star\star$) 2** *(X 2021)*

*On note* $D$ *le disque unité ouvert de* $\mathbb{C}$ *et on se donne* $0 < r < 1$*et* $\theta$ *un réel.*

*a) Vérifier que* $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{r^n \cos(n\theta)}{n} = -\displaystyle\int_0^r \dfrac{x - \cos(\theta)}{x^2 - 2x\cos(\theta) + 1} dx$*.*

*b) En déduire que, pour* $z \in D$*, on a :* $\ln|1-z| = -Re(\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n})$*.*

*c) Exprimer alors sous forme de somme de série l'intégrale :* $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(|1 + re^{i\theta}|) d\theta$*.*

*On pose* $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \ln\left(\max\left\{|e^{i\theta} - 1|, |e^{i\theta} + 1|\right\}\right) d\theta$*.*

*d) Montrer que :* $I = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$*.*

♡