Devoir surveillé n° 3

CORRIGÉ

Exercice 1.

1. (a) Le nombre $f(x)$ est défini lorsque $x \in D_{\sqrt{\cdot}} = \mathbb{R}_+$ et $x \in D_{\ln} = \mathbb{R}_+^*$, donc $D_f = \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+^*$.

   (b) La fonction f est, à une constante près, le produit des fonctions usuellement dérivables $\sqrt{\cdot}$ et $\ln$, donc f est dérivable sur son domaine de définition. On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \dfrac{\ln(x)}{2\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{x}}{x}$, donc :

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}} > -\frac{\sqrt{x}}{x} \Leftrightarrow \ln(x) > -2 \Leftrightarrow x > \frac{1}{e^2}.$$

   La fonction f est donc strictement décroissante sur $\left]0, \dfrac{1}{e^2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\dfrac{1}{e^2}, +\infty\right[$.
   De plus, par croissances comparées : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \ln(2)$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. D'où le tableau :

x	0_+		$\frac{1}{e^2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$\ln(2)$	$\searrow$	$-\frac{2}{e} + \ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

   (c) D'après l'étude ci-dessus, la fonction f atteint son minimum en $\dfrac{1}{e^2}$, valant $-\dfrac{2}{e} + \ln(2) \simeq -0,05$.
   Comme la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et, d'une part strictement décroissante sur $\left]0, \dfrac{1}{e^2}\right]$ avec $0 \in f\left(\left]0, \dfrac{1}{e^2}\right]\right)$; d'autre part strictement croissante sur $\left[\dfrac{1}{e^2}, +\infty\right[$ avec $0 \in f\left(\left[\dfrac{1}{e^2}, +\infty\right[\right)$: d'après le théorème de la bijection continue, f s'annule exactement une fois sur $\left]0, \dfrac{1}{e^2}\right]$, et une fois sur $\left[\dfrac{1}{e^2}, +\infty\right[$. Donc f s'annule deux fois sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. (a) On a $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{2}$, donc $\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{1}{2^n}$, donc $n^2 = 2^n$.

   (b) Comme $n \geq 1$, 2^n est divisible par 2. Donc, d'après a), n^2 est divisible par 2. Donc 2 est un facteur premier de n^2, donc, comme n et n^2 ont les mêmes facteurs premiers, 2 est un facteur premier de n. Donc n est pair.
   Posons alors $n = 2k$. On a : $(2k)^2 = 2^{2k}$, donc $4k^2 = 2^{2k}$. Or $k = 1$ et $k = 2$ satisfont cette équation.
   Donc $n = 2$ et $n = 4$ sont deux valeurs possibles de n.

3. D'après 2., $x = \dfrac{1}{4}$ et $x = \dfrac{1}{16}$ sont solutions de (E).
   De plus : $(E) \Leftrightarrow \sqrt{x}\ln(x) = -\ln(2) \Leftrightarrow f(x) = 0$. Or, d'après 1., cette dernière équation a exactement deux solutions réelles.
   Donc les solutions trouvées en 2. sont exactement les solutions de (E) : $S = \left\{\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{16}\right\}$.

Exercice 2.

1. Comme l'application g est injective, l'application h l'est également.
   Comme l'ensemble d'arrivée de h est égal à son ensemble image, l'application h est surjective.
   Donc l'application h est bijective.
2. Soit $x \in X$. Alors $f(x) \in Y$, donc $\varphi(x) = g(f(x)) \in g(Y)$. Donc φ est bien définie.
   De plus, comme f et g sont injectives, l'application $\varphi = g \circ f$ est injective.
3. (a) Soit $x \in E$:
      - Si $x \in B$, alors $v(x) = u(x) \in A$ par définition de u.
      - Si $x \notin B$, alors $x \notin B_0$, donc $x \in A$. Donc $v(x) \in A$.

      Dans tous les cas, $v(x) \in A$, donc l'application v est bien définie.

   (b) On a : $u(B) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} u(B_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_{n+1} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} B_n \subset B$.
      Soient $x_1, x_2 \in E$. Supposons que $v(x_1) = v(x_2)$. On raisonne par disjonction de cas :
      - Si $x_1 \in B$ et $x_2 \in B$: alors $u(x_1) = u(x_2)$, donc, comme u est injective, $x_1 = x_2$,
      - Si $x_1 \notin B$ et $x_2 \notin B$: alors $x_1 = x_2$,
      - Si $x_1 \in B$ et $x_2 \notin B$: alors $u(x_1) = x_2$. Or $u(B) \subset B$, donc $u(x_1) \in B$, donc $x_2 \in B$, ce qui est faux. Il est donc impossible que $x_1 \in B$ et $x_2 \notin B$.
      - Si $x_1 \notin B$ et $x_2 \in B$, on arrive de même à une absurdité.

      Donc, dans tous les cas possibles, $x_1 = x_2$. Donc l'application v est injective.

   (c) Comme $y \in B$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $y \in B_n$.
      De plus, comme $y \in A$, $y \notin B_0$. Donc $n \geq 1$, et donc : $y \in u(B_{n-1})$.
      Il existe donc $x \in B_{n-1}$ tel que $y = u(x)$.
      Donc y admet bien un antécédent par u dans E.

   (d) D'après b), l'application v est injective.
      Montrons que l'application v est surjective :
      Soit $y \in A$, montrons que y admet un antécédent par v dans E.
      - Si $y \in B$, alors, d'après c), il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. Donc, par définition de v, $y = v(x)$.
      - Si $y \notin B$, alors, par définition de v : $y = v(y)$.

      L'application v est donc bien surjective.
      L'application v est donc bijective.
4. D'après le résultat de la question 3., appliqué à $E = X$, $A = g(Y) \subset E$, et $u = \varphi$ injective :

   il existe une application $\psi : X \to g(Y)$ bijective.

   Comme, d'après 1., l'application $h : Y \to g(Y)$ est également bijective :

   l'application $h^{-1} \circ \psi$ est donc une bijection de X dans Y.

   Le théorème de Cantor-Bernstein est ainsi démontré.

Exercice 3.

1. On a $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$ et $F_3 = 257$.
   F_0, F_1 et F_2 sont usuellement premiers, et $\sqrt{F_3} \simeq 16,03$, donc on vérifie à la main que F_3 n'est pas divisible par $2, 3, 5, 7, 11$ ou 13.
   Pour F_4, on applique l'algorithme suivant :
```
from math import sqrt
def estpremier(n):
   for k in range(2,int(sqrt(n))+1):
     if n%k==0:
       return False
   return True
print(estpremier(2**(2**4)+1))
```
2. On a $(5^4 + 2^4)2^{28} - \left((2^7 \times 5)^4 - 1\right) = 5^4 \times 2^{28} + 2^{32} - 2^{28} \times 5^4 - 1 = 2^{32} - 1 = F_5$.
3. D'après la formule du binôme de Newton :
$$(a-1)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^k (-1)^{m-k}.$$
   Le premier terme de cette somme est $(-1)^m = 1$ (puisque m est pair), donc :
$$(a-1)^m - 1 = \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} a^k (-1)^{m-k}.$$
   Comme chaque terme de cette somme est un multiple de a, $(a-1)^m - 1$ est bien divisible par a.
4. On a $5^4 + 2^4 = 625 + 16 = 641$ et $2^7 \times 5 = 2^6 \times 10 = 640$.
   Posons $a = 641$, alors d'après la question 2 :
$$F_5 = a \times 2^{28} - \left((a-1)^4 - 1\right).$$
   Or d'après la question 3, $(a-1)^4 - 1$ est divisible par a.
   Comme $a \times 2^{28}$ est également divisible par a, F_5 l'est donc aussi.
   Donc 641 divise F_5, donc F_5 n'est pas premier.

Problème.

I. 1. Comme les fonctions ch, sh et $\arctan$ sont définies sur $\mathbb{R}$ et que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $1+\mathrm{ch}(x) \neq 0$, les fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}$.

2. Les fonctions ch, sh et $\arctan$ sont usuellement dérivables sur $\mathbb{R}$, donc f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
On a :
$$f' = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{sh}'}{1+\mathrm{sh}^2} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{ch}}{\mathrm{ch}^2} = \frac{1}{2\mathrm{ch}},$$
$$\text{et} \quad g' = \frac{\left(\frac{\mathrm{sh}}{1+\mathrm{ch}}\right)'}{1+\left(\frac{\mathrm{sh}}{1+\mathrm{ch}}\right)^2} = \frac{\frac{\mathrm{ch}(1+\mathrm{ch})-\mathrm{sh}^2}{(1+\mathrm{ch})^2}}{1+\frac{\mathrm{sh}^2}{(1+\mathrm{ch})^2}} = \frac{\mathrm{ch}(1+\mathrm{ch})-\mathrm{sh}^2}{(1+\mathrm{ch})^2+\mathrm{sh}^2} = \frac{1+\mathrm{ch}}{2\mathrm{ch}+2\mathrm{ch}^2} = \frac{1}{2\mathrm{ch}},$$
donc $f' = g'$.

3. D'après la question précédente, il existe donc $c \in \mathbb{R}$ tel que $f = g + c$.
Or $f(0) = \dfrac{1}{2}\arctan(0) = g(0)$, donc $c = 0$. Donc $f = g$.

II. 1. Cours : $E = \mathbb{R} \setminus \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $2f(x) = \arctan(\mathrm{sh}(x))$.
Or : $\forall y \in \mathbb{R}, \arctan(y) \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\subset E$, donc $2f(x) \in E$.
On a :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tan(2f(x)) = \tan\left(\arctan(\mathrm{sh}(x))\right) = \mathrm{sh}(x).$$

3. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{ch}(x)} > 0$, donc h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, h est impaire et $h(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, donc h est à valeurs dans $]-1,1[$.

4. Comme h est à valeurs dans $]-1,1[$, $g = \arctan \circ h$ est à valeurs dans $]\arctan(-1), \arctan(1)[= \left]-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right[$. Donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ 2g(x) \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
On a :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tan(2g(x)) = \frac{2\tan(g(x))}{1-\tan^2(g(x))} = \frac{2\frac{\mathrm{sh}}{1+\mathrm{ch}}}{1-\frac{\mathrm{sh}^2}{(1+\mathrm{ch})^2}}(x) = \frac{2\mathrm{sh}(1+\mathrm{ch})}{(1+\mathrm{ch})^2-\mathrm{sh}^2}(x) = \mathrm{sh}(x).$$

5. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $\tan(2f(x)) = \tan(2g(x))$ **et que** $(2f(x), 2g(x)) \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[^2$, on a $2f(x) = 2g(x)$, donc $f(x) = g(x)$. Donc $f = g$.

III. Application :

1. On a $\mathrm{ch}\left(\dfrac{1}{2}\ln(3)\right) = \dfrac{\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}}{2} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ et $\mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{2}\ln(3)\right) = \dfrac{\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

2. On a $f\left(\dfrac{1}{2}\ln(3)\right) = \dfrac{1}{2}\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{12}$,
et $g\left(\dfrac{1}{2}\ln(3)\right) = \arctan\left(\dfrac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{2}{\sqrt{3}}}\right) = \arctan\left(\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}\right) = \arctan\left(2-\sqrt{3}\right)$,
donc $\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = 2-\sqrt{3}$.