Devoir surveillé n° 3

Durée : 3 heures. Calculatrices non autorisées.
La notation tiendra largement compte de la qualité de la rédaction.
Les résultats doivent être encadrés.
Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre souhaité.
Les exercices qui ne sont pas traités dans l'ordre doivent être rédigés sur des copies séparées.
Le sujet et le brouillon ne sont pas à rendre. Le barème est indicatif.

Exercice 1. *(8 points)* On souhaite résoudre l'équation (E) : $x^{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2}$.

1. On pose $f(x) = \sqrt{x}\ln(x) + \ln(2)$.
   (a) Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
   (b) Étudier les variations de la fonction f, et dresser un tableau de variations complet de la fonction.
   (c) Déterminer le nombre de points d'annulation de la fonction f.
   Indication : $\ln(2) \simeq 0,69$ *et* $\dfrac{1}{e} \simeq 0,37$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $x = \dfrac{1}{n^2}$ est solution de (E).
   (a) Montrer que $n^2 = 2^n$.
   (b) En déduire que n est pair. Déterminer alors deux valeurs possibles de n.
3. Conclure.

Exercice 2. *(8 points)* Soient X et Y des ensembles. On suppose qu'il existe une application injective $f : X \to Y$ et une application injective $g : Y \to X$.
Nous allons montrer qu'il existe alors une bijection de X dans Y : c'est le *théorème de Cantor-Bernstein*.

1. On note h la restriction à l'arrivée de g à $g(Y)$, c'est-à-dire $h : \left\{ \begin{array}{ccc} Y & \to & g(Y) \\ y & \mapsto & g(y) \end{array} \right.$.
   Montrer que l'application h est bijective.
2. On note φ la restriction à l'arrivée de $g \circ f$ à $g(Y)$, c'est-à-dire $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} X & \to & g(Y) \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{array} \right.$.
   Montrer que l'application φ est injective.
3. Soit E un ensemble, et A une partie de E. On suppose qu'il existe une application injective $u : E \to A$.
   On note $B_0 = E \setminus A$, puis : $\forall n \in \mathbb{N},\ B_{n+1} = u(B_n)$.
   On note enfin $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$, puis $v : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & A \\ x & \mapsto & u(x) \text{ si } x \in B,\ x \text{ si } x \notin B \end{array} \right.$.
   (a) Montrer que l'application v est bien définie, c'est-à-dire : $\forall x \in E,\ v(x) \in A$.
   (b) Montrer que $u(B) \subset B$. En déduire que l'application v est injective.
   (c) Soit $y \in A \cap B$. Montrer que y admet un antécédent par u dans E.
   (d) En déduire que l'application v est bijective.
4. En déduire qu'il existe une bijection $\psi : X \to g(Y)$. Conclure.

Exercice 3. *(6 points)* On s'intéresse aux *nombres de Fermat*, définis pour tout n dans $\mathbb{N}$ par $F_n = 2^{2^n} + 1$.

1. Montrer que F_0, F_1, F_2, F_3 sont premiers.
   Écrire un algorithme en Python permettant de vérifier que F_4 est premier.
2. Justifier (sans tout calculer !) que $F_5 = (5^4 + 2^4)2^{28} - \big((2^7 \times 5)^4 - 1\big)$.
3. Soient a et m deux entiers naturels, où m est pair. Montrer que a divise $(a-1)^m - 1$.
4. Calculer $5^4 + 2^4$ et $2^7 \times 5$. Déduire des questions précédentes que F_5 n'est pas premier.

Problème. *(12 points)* On considère les fonctions

$$f : x \mapsto \frac{1}{2}\arctan(\mathrm{sh}(x)) \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \arctan\left(\frac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}\right).$$

On va montrer que $f = g$ de deux manières différentes.

I.
   1. Déterminer le domaine de définition D de f et g.
   2. Montrer que f et g sont dérivables sur D. Calculer f' et g'.
   3. En déduire le résultat voulu.

II.
   1. Rappeler le domaine de définition E de la fonction $\tan$.
   2. Montrer que : $\forall x \in D,\ 2f(x) \in E$. Pour x dans D, calculer $\tan(2f(x))$.
   3. Montrer que la fonction $h : x \mapsto \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}$ est à valeurs dans $]-1, 1[$.
   4. Montrer que : $\forall x \in D,\ 2g(x) \in E$. Pour x dans D, calculer $\tan(2g(x))$.
   5. En déduire le résultat voulu.

III. Application :
   1. Simplifier $\mathrm{ch}\left(\dfrac{1}{2}\ln(3)\right)$ et $\mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{2}\ln(3)\right)$.
   2. En appliquant l'égalité $f(x) = g(x)$ en $x = \dfrac{1}{2}\ln(3)$, calculer $\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.